Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung Serie 3

1. Wir haben

$$\{A,B\} = \frac{1}{2}(AB+BA) \qquad \text{und} \qquad \{A,A\} = \frac{1}{2}(AA+AA) = A^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\{\{A,B\},\{A,A\}\} &= \left\{\frac{1}{2}(AB+BA), A^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(AB+BA)A^2 + A^2\cdot\frac{1}{2}(AB+BA)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(ABA^2+BA^3+A^3B+A^2BA\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Weiter, gilt

$$\begin{aligned}\{\{A,\{B,\{A,A\}\}\} = \{A,\{B,A^2\}\} &= \left\{A, \frac{1}{2}(BA^2+A^2B)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(A\cdot\frac{1}{2}(BA^2+A^2B) + \frac{1}{2}(BA^2+A^2B)A\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(ABA^2+A^3B+BA^3+A^2BA\right),\end{aligned}$$

was gleich (1) ist.

2. Die gesuchten Längen sind:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\| &= \sqrt{1^2+0^2+8^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{81} = 9, \\ \|\mathbf{v}_2\| &= \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{16} = 4, \\ \|\mathbf{v}_3\| &= \sqrt{2^2+3^2+(-2)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{25} = 5,\end{aligned}$$

Die Winkel:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1) &= \frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{e}_1\|} = \frac{1+0+0+0+0}{9\cdot 1} = \frac{1}{9}, \\ \cos(\varphi_2) &= \frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{e}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|\cdot\|\mathbf{e}_1\|} = \frac{2+0+0+0+0}{4\cdot 1} = \frac{1}{2}, \\ \cos(\varphi_3) &= \frac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|\cdot\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{4-3-6+2+2}{5\cdot 4} = -\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. a)

$$\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt keine weitere Inverse. Im Fall $ad - bc = 0$ gibt es keine Inverse.

b) Die Inverse von A lautet:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

Da $B = PA$ das Produkt einer Permutationsmatrix P mit A ist, und $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$, gilt für die Inverse von B:

$$B^{-1} = (PA)^{-1} \overset{2.18}{=} A^{-1}P^{-1} \overset{2.20}{=} A^{-1}P^{\mathsf{T}}.$$

Also:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/13 \\ 1/11 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. MATLAB-Aufgabe

a)

```
function B = hoch(A, k)
% Computes A^k for a square matrix A

        if k == 0
                % If k is zero, return the identity matrix
                B = eye(size(A));
        elseif mod(k, 2) == 0
                % If k is even, compute A^(k/2) ...
                tmp = hoch(A, k/2);
                % ... and return (A^(k/2))^2
                B = tmp*tmp;
        else
                % If k is odd, return A*(A^(k-1)) (k-1 is then even)
                B = A*hoch(A, k-1);
        end
end
```

Im Matlab Command Window:

```
>> A = [0 1; 1 1];
>> hoch(A, 35)
ans =
     5702887     9227465
     9227465    14930352
```

Siehe nächstes Blatt!

Also ist $f_{35} = 9227465$.

5. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Seien A, B und C $n \times n$-Matrizen. Kann man $ABC - CBA = 0$ schliessen?

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt es nicht.

2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und A, B symmetrische $n \times n$-Matrizen. Kann man schliessen, dass die Matrix AB symmetrisch ist?

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht symmetrisch.