D-INFK Lineare Algebra HS 2016
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 3

1. Für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ definieren wir das Jordan-Produkt

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} := \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA}).$$

Zeigen Sie die Jordan-Identität für Matrizen:

$$\{\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}, \{\mathbf{A}, \mathbf{A}\}\} = \{\mathbf{A}, \{\mathbf{B}, \{\mathbf{A}, \mathbf{A}\}\}\}.$$

2. Gegeben sind die fünf Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ bis $\mathbf{e}_5$ in $\mathbb{R}^5$ sowie die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\mathbf{v}_1$ bis $\mathbf{v}_3$ und die Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{e}_1$, zwischen $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{e}_1$, sowie zwischen $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_2$

3. (Korrektur durch Assistenten)

a) Überprüfen Sie, dass

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

eine Inverse der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist. Gibt es eine weitere Inverse? Geben Sie die Inverse für den Fall $ad - cb = 0$ an.

b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet dann die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dazu den Satz 2.18 aus dem Skript und die Tatsache, dass sich $\mathbf{B}$ als Produkt zweier einfacher Matrizen schreiben lässt: $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$ mit der Permutationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Satz 2.20 liefert die Inverse $\mathbf{P}^{-1}$.

4. MATLAB-Aufgabe

Die Matrix-Potenz $\mathbf{A}^k$ kann man durch

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{falls } k = 0 \\ \left(\mathbf{A}^{k/2}\right)^2 & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnen, wobei I die Identitätsmatrix bezeichnet.

a) Schreiben Sie eine Funktion `function B = hoch(A, k)`, die für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ die Potenz $\mathbf{A}^k$ berechnet und zurückgibt. Sie dürfen *nicht* die Potenz-Operatoren `^` oder `power` benutzen, sondern *nur* das Matrix-Produkt `*`.

b) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} \qquad \text{für } k \geq 1,$$

wobei f_k die Fibonacci-Reihe bezeichnet. Finden Sie f_{35} mit Ihrer Funktion `hoch`.

5. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ $n \times n$-Matrizen. Kann man $\mathbf{ABC} - \mathbf{CBA} = 0$ schliessen?

(a) Ja

(b) Nein

Siehe nächstes Blatt!

2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ symmetrische $n \times n$-Matrizen. Kann man schliessen, dass die Matrix $\mathbf{AB}$ symmetrisch ist?

(a) Ja

(b) Nein

Abgabe: Do/Fr 20./21. Oktober 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`