D-INFK Lineare Algebra HS 2016
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 4

1. **a)** $\mathbf{M}$ ist orthogonal, falls $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{I}_3$ (also falls $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$). Es gilt:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} & \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{I}_3$, muss $\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4} = 1$ gelten, also $\alpha^2 = \frac{6}{4}$, und daraus folgt $\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Da wir $\alpha \geq 0$ suchen, ist $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$ die gesuchte Lösung.

b) Die Matrix $\mathbf{C}$ ist orthogonal falls $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$, mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{C}$ ist also genau dann orthogonal falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ orthogonal sind.

c) i) $\mathbf{D}$ ist orthogonal, falls $\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{I}$, d.h. dass $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix mit $d_{ii}^2 = 1$ ist. Damit müssen die Diagonaleinträge $d_{ii} \in \{1, -1\}$ erfüllen.

ii) $\mathbf{D}$ ist unitär, falls $\mathbf{D}\mathbf{D}^H = \mathbf{I}$, d.h. $d_{ii}\overline{d_{ii}} = 1$ ist. Damit müssen die Diagonaleinträge $|d_{ii}| = 1$ erfüllen.

2. **a)**

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & -4 \\ 0 & 12 & 4 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{L}\mathbf{R},
\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Wir lösen erst $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ und danach $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$. Dann ist

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{LR})\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{Rx}) = \mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

- $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{L} & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  also $y = \begin{pmatrix}-7 & -5 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top$.

- $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 & -\frac{33}{4} \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & -\frac{31}{4} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

  also

$$2x_1 = \frac{1}{4}, \qquad 3x_2 = -6, \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \qquad 4x_4 = 1,$$

  oder

$$x_1 = \frac{1}{8}, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \qquad x_4 = \frac{1}{4}.$$

3. **a)** $\boldsymbol{E_{32}}(\mu)\boldsymbol{E_{21}}(\alpha) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha\mu & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

$\neq \boldsymbol{E_{21}}(\alpha)\boldsymbol{E_{32}}(\mu) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Es gilt: $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)\boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu) = (\boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top)(\boldsymbol{I} + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top) =$

$\boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top + \lambda\mu\vec{e}_i\vec{e}_j^\top\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top =$

$\boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top$

weil $\vec{e}_j^\top\vec{e}_k = 0$ mit $j \neq k$

andererseits gilt: $\boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu)\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda) =)(\boldsymbol{I} + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top)(\boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top =$

$\boldsymbol{I} + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top\lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + +\mu\lambda\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top\vec{e}_i\vec{e}_j^\top =$

$\boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top$

weil $\vec{e}_\ell^\top\vec{e}_i = 0$ mit $\ell \neq i$

Daher gilt: $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)\boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu) = \boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + \mu\vec{e}_k\vec{e}_\ell^\top = \boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu)\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)$

c) Mit j < i < k ist die Bedingung von 4b) erfüllt.
Beachte $\vec{e}_i\vec{e}_j^\top$ ist eine Matrix mit lauter Null Einträgen bis auf eine einzelne Eins an ij-ter Stelle.
Daher gilt: $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)\boldsymbol{E_{kj}}(\mu) = \boldsymbol{I} + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^\top + \mu\vec{e}_k\vec{e}_j^\top$ ist eine Matrix mit lauter Einsen in auf der Diagonalen und Null sonst bis auf λ an ij-ter Stelle und μ an kj-ter Stelle.

4. a)

```
function [L,R] = mylr(A)
%LR   LR-factorization of A

n = size(A, 1);
L = eye(n);
R = A;

% Transform R into upper triangular form
for k = 1:n
    % Zero column?
    if all(abs(R(k, k)) < eps)
        % R(k,k) is singular; return "false"
        L = false;
        R = false;
        return;
    end

    % Set the k-th column of L
    L(k+1:n,k) = R(k+1:n,k) / R(k,k);
    R(k+1:n,k:n) = R(k+1:n,k:n) - R(k+1:n,k) * R(k,k:n) / R(k,k);
end
end
```

Bitte wenden!

```
>> A = [1 -2 -2 10;-3 8 1 0;1 0 5 -5;-9 5 -3 15];
>> [L,R] = mylr(A)

L =
     1            0            0            0
    -3            1            0            0
     1            1            1            0
    -9         -6.5      -4.4583            1


R =
     1           -2           -2           10
     0            2           -5           30
     0            0           12          -45
     0            0            0       99.375

>> A-L*R

ans =

      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
      0     0     0     0
```

b) Wenn wir die Hilfe des MATLAB-Befehls aufrufen (`help lu`), sehen wir, dass optional auch eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ mit `[L,U,P] = lu(A)` zurückgeben werden kann. Die LR-Zerlegung wendet also eine Pivotstrategie an, wodurch Zeilen getauscht werden können. Dies macht die Zerlegung numerisch stabiler, resultiert aber in einer anderen LR-Zerlegung.

5. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

Siehe nächstes Blatt!

1. Betrachten Sie die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrix $\mathbf{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

√ (b) Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

(c) Es hängt von $\vec{v}$ ab, ob das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{v}$ lösbar ist.

√ (d) Die Matrix $\mathbf{A}$ hat eine Inverse.

(e) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Deshalb ist die Matrix invertierbar und hat das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{f}$ für jedes $\vec{f} \in \mathbf{R}^3$ genau eine Lösung $\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{f}$. Wenn $\vec{f} = 0$, hat das System nur triviale Lösung $\boldsymbol{A}^{-1}\vec{f} = 0$.

Bitte wenden!

2. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ reelle $n \times n$-Matrizen. Welche Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) Wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C}$ invertierbar ist, dann sind auch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbar.

(b) Wenn $\mathbf{A}$ Rang 1 hat, dann hat auch $\mathbf{AB}$ Rang 1.

$\surd$ (c) Es gibt nur eine $n \times n$-Matrix mit Rang 0.

$\surd$ (d) Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathbf{A}^k = 0$, dann ist $\mathbf{A}$ nicht invertierbar.

Sei $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, dann gelten $\operatorname{rang} \mathbf{C} \leq \operatorname{rang} \mathbf{A} \leq n$ und $\operatorname{rang} \mathbf{C} \leq \operatorname{rang} \mathbf{B} \leq n$. Wenn $\mathbf{C}$ invertierbar ist, dann gilt $\operatorname{rang} \mathbf{C} = n = \operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{B}$, folglich sind die beide Matrizen invertierbar.

Wenn $\mathbf{B} = 0$, hat $\mathbf{AB}$ Rang 0 für alle $\mathbf{A}$.

Die $n \times n$-Nullmatrix sind eindeutige $n \times n$-Matrix mit Rang 0.

Sei $\mathbf{A}^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Angenommen, $\mathbf{A}$ invertierbar wäre. Dann gilt

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k-1} \mathbf{A}^k = 0,$$

also ist die Annahme falsch, d.h. $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar.