D-INFK Lineare Algebra HS 2016
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 4

1. Matrizen **(Korrektur durch Assistenten)**

a) Für welche positiven Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

eine orthogonale Matrix?

b) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

ebenfalls orthogonal ist.

c) Sei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}$. Welche Beziehung müssen die Diagonaleinträge jeweils erfüllen, damit die beiden folgenden Aussagen gelten?

i) $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix.

ii) $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist eine unitäre Matrix.

2. Sei $\mathbf{A}$ die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wobei

$$b = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der LR-Zerlegung von $\mathbf{A}$.

Bitte wenden!

3. Sei $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)$ die Elementarmatrix:

$$\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & \lambda & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

wobei i $\neq$ j und sei $\vec{e}_i$ die i-te Spalte von $\boldsymbol{I_n}$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda) = \boldsymbol{I} + \lambda \vec{e}_i \vec{e}_j^{\top}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\boldsymbol{E_{32}}(\mu)\boldsymbol{E_{21}}(\alpha) \neq \boldsymbol{E_{21}}(\alpha)\boldsymbol{E_{32}}(\mu)$

b) Zeigen Sie, falls $j \neq k$ und $i \neq \ell$ gilt: $\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)\boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu) = \boldsymbol{E_{k\ell}}(\mu)\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)$

c) Zeigen Sie, dass für j $<$ i $<$ k gilt:

$$\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)\boldsymbol{E_{kj}}(\mu) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & j & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & \lambda & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mu & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \boldsymbol{E_{kj}}(\mu)\boldsymbol{E_{ij}}(\lambda)$$

4. MATLAB-Aufgabe **LR-Zerlegung**

a) Implementieren Sie jetzt die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$ als MATLAB-Funktion.

```
function [L,R] = mylr(A)
```

Siehe nächstes Blatt!

Testen Sie Ihre Implementierung mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 10 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -9 & 5 & -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat des MATLAB-Befehls `[L,U] = lu(A)`. Erhalten Sie das Gleiche? Wenn nicht, weshalb?

5. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Betrachten Sie die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrix $\mathbf{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

(b) Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

(c) Es hängt von $\vec{v}$ ab, ob das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{v}$ lösbar ist.

(d) Die Matrix $\mathbf{A}$ hat eine Inverse.

(e) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch.

2. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ reelle $n \times n$-Matrizen. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C}$ invertierbar ist, dann sind auch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbar.

(b) Wenn $\mathbf{A}$ Rang 1 hat, dann hat auch $\mathbf{AB}$ Rang 1.

(c) Es gibt nur eine $n \times n$-Matrix mit Rang 0.

(d) Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathbf{A}^k = 0$, dann ist $\mathbf{A}$ nicht invertierbar.

Abgabe: Do/Fr 27./28. Oktober 2016