D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Musterlösung 5

1. **a)**

$$\boldsymbol{L_k} = \boldsymbol{I} + \vec{l}_k \vec{e}_k^\top$$

Mann zeige dass:

$$\boldsymbol{L_k L_k^{-1}} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{L_k^{-1} L_k}$$

Weil $\vec{e}_k^\top \vec{l}_k = 0$ ist gilt:

$$\boldsymbol{L_k L_k^{-1}} = (\boldsymbol{I} + \vec{l}_k \vec{e}_k^\top)(\boldsymbol{I} - \vec{l}_k \vec{e}_k^\top) = \boldsymbol{I} - \vec{l}_k \vec{e}_k^\top \vec{l}_k \vec{e}_k^\top = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} - \vec{l}_k \vec{e}_k^\top \vec{l}_k \vec{e}_k^\top = \boldsymbol{L_k^{-1} L_k}$$

b)

$$\boldsymbol{L_k L_{k+1}} = (\boldsymbol{I} + \vec{l}_k \vec{e}_k^\top)(\boldsymbol{I} + \vec{l}_{k+1} \vec{e}_{k+1}^\top)$$

wobei

$$\vec{l}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ l_{k+2,k} \\ \vdots \\ \\ l_{n,k} \end{pmatrix} \qquad \vec{l}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ l_{k+2,k+1} \\ \vdots \\ \\ l_{n,k+1} \end{pmatrix}$$

damit ist

$$\boldsymbol{L_k L_{k+1}} = \boldsymbol{I} + \vec{l}_k \vec{e}_k^\top + \vec{l}_{k+1} \vec{e}_{k+1}^\top + \vec{l}_k \vec{e}_k^\top \vec{l}_{k+1} \vec{e}_{k+1}^\top$$

Weil $\vec{e}_k^\top \vec{l}_{k+1} = 0$ ist gilt:

$$\boldsymbol{L_k L_{k+1}} = \boldsymbol{I} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 0 & & \\ & & l_{k+2,k} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & l_{n,k} & & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & l_{k+2,k+1} & \ddots & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & l_{n,k+1} & & & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Die Matrix $\boldsymbol{L_k L_{k+1}}$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einträgen von $\boldsymbol{L_k}$ und $\boldsymbol{L_{k+1}}$ in den entsprechenden Spalten unterhalb der Diagonalen.

Insbesondere gilt $\boldsymbol{L_1 L_2 \dots L_{n-1}} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ l_{3,1} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ l_{n,1} & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & l_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ 0 & l_{n,2} & & & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wir haben $\dim \mathbb{C}^3 = 3$. Sei $W = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Weil $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ drei Vektoren sind, gilt $\dim W \leq 3$. Wir müssen zeigen, dass $\dim W = 3$, d.h., dass $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ linear unabhängig sind.

Sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_1 \vec{x}_1 + \gamma_2 \vec{x}_2 + \gamma_3 \vec{x}_3 = 0,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 \\ a\gamma_2 + \gamma_3 \\ \gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Von der ersten Reihe sehen wir, dass $\gamma_2 = 0$ sein muss. Dann ist $\gamma_3 = 0$ (2. Reihe), und somit auch $\gamma_1 = 0$ (3. Reihe). Also ist $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ linear unabhängig.

3. **a)** $\mathcal{P}_3$ hat Dimension 4. Wir testen ob die vier Polynome $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ linear unabhängig sind.
Für alle t gilt:

$$0 = \gamma_0 p_0(t) + \gamma_1 p_1(t) + \gamma_2 p_2(t) + \gamma_3 p_3(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3$$

Die Gleichung ist nur erfüllt, falls alle Koeffizienten γ_i null sind. (siehe auch Beispiel 4.15 im Skript)

Die vier Polynome $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis von $\mathcal{P}_3$.

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben

$$\begin{aligned}
q_0(t) &= t-1 = p_1(t) - p_0(t),\\
q_1(t) &= t+1 = p_1(t) + p_0(t),\\
q_2(t) &= (t-1)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = p_3(t) - 3p_2(t) + 3p_1(t) - p_0(t),\\
q_3(t) &= (t+1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = p_3(t) + 3p_2(t) + 3p_1(t) + p_0(t),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{S}} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{S}$ ist invertierbar mit

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Weil

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

muss dann

$$p = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

wobei $b_i = \sum_{j=0}^{3} a_j(\mathbf{S}^{-1})_{j,i}$. Folglich existieren für alle $p \in \mathcal{P}_3$ Zahlen $b_0, \ldots, b_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$p = b_0q_0 + b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3.$$

Also ist $\mathcal{B}'$ eine basis von $\mathbb{P}_3$.

b) $\mathbf{T}$ heisst Transformationsmatrix des Basiswechsels. In der k-ten Kolonne von $\mathbf{T}$ stehen gerade die Koordinaten des k-ten neuen Basisvektors (bezüglich der alten Basis $\mathcal{B}$).

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Bitte wenden!

4. a)

```
function [L, R, P] = lrp( A )
%LRP   LR-factorization of A
% Computes lower matrix L, upper matrix R and permutation matrix P such
% that
%    P*A = L*R.

        n = size(A, 1);
        P = eye(n);
        L = zeros(n);

        % Transform A into upper triangular form
        for k = 1:n
                % Zero column?
                if all(abs(A(k:n, k)) < eps)
                        % A is singular; return "false"
                        L = false;
                        R = false;
                        return;
                end

                % Find pivot element
                [pivot, pivotInd] = max(abs(A(k:n, k)));   % Index of pivot
                pivotInd = pivotInd + (k-1);

                % Pivot rows of A and P
                A([k, pivotInd], :) = A([pivotInd, k], :);
                P([k, pivotInd], :) = P([pivotInd, k], :);
                L([k, pivotInd], :) = L([pivotInd, k], :);

                % Set the k-th column of L
                L(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k,k);

                % Eliminate rest of column
                for l = k+1:n
                        A(l,:) = A(l,:) - A(k,:)/A(k,k)*A(l,k);
                end
        end

        % Add the diagonal elements of L
        L = L + eye(n);

        % R is now the row-reduced form of A
        R = A;
end
```

b)

```
>> A = [0, 1, 2; 1, 0, 3; 4, -3, 8];
```

Siehe nächstes Blatt!

```
>> [L,R,P] = lrp(A)

L =

    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.2500    0.7500    1.0000


R =

    4.0000   -3.0000    8.0000
         0    1.0000    2.0000
         0         0   -0.5000


P =

     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

5. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume?

$\surd$ (a) $V := \big\{(s-2r,\, r,\, 2s) \in \mathbb{R}^3 \;:\; r,s \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Sei $x, y \in V$ und $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, so dass $x = (s_1 - 2r_1,\, r_1,\, 2s_1)$ und $x = (s_2 - 2r_2,\, r_2,\, 2s_2)$. Dann gilt es

$$x + y = (s_1 - 2r_1,\, r_1,\, 2s_1) + (s_2 - 2r_2,\, r_2,\, 2s_2) = (s - 2r,\, r,\, 2s) \in V,$$

wobei $r = r_1 + r_2$ und $s = s_1 + s_2$. Weiter gilt es für jede $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha x = \alpha(s_1 - 2r_1,\, r_1,\, 2s_1) = (s - 2r,\, r,\, 2s) \in V,$$

wobei $r = \alpha r_1$ und $s = \alpha s_1$.

(b) $W := \big\{(s-2, 1, 2s)^\top \in \mathbb{R}^3 \;:\; r,s \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Zum Beispiel ist $0 \notin W$.

Bitte wenden!

2. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{Q}_n(\beta) := \{p : p \in \mathcal{P}_n \text{ und } p(1) = \beta\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{P}_n$?

(a) $\beta = 1$

√ (b) $\beta = 0$

(c) $\beta \notin \{0, 1\}$

(d) Alle $\beta \in \mathbb{R}$

Sei β eine Zahl, so dass $\mathcal{Q}_n(\beta)$ ein Untervektorraum ist. Für $p, q \in \mathcal{Q}_n(\beta)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss $p + q \in \mathcal{Q}_n(\beta)$ und $\alpha p \in \mathcal{Q}_n(\beta)$. Wir haben $p(1) = q(1) = \beta$, und also

$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = \beta + \beta = 2\beta$$

und

$$(\alpha p)(1) = \alpha p(1) = \alpha\beta.$$

Also muss $2\beta = \beta$ und $\alpha\beta = \beta$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, was nur für $\beta = 0$ gilt.

3. Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume?

√ (a) $\{p \in \mathcal{P}_1 : p(-1) = p(1)\} \subseteq \mathcal{P}_1$

Wenn p, q in der Menge sind, gilt es $(p + q)(-1) = p(-1) + q(-1) = p(1) + q(1) = (p + q)(1)$, und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha p)(-1) = \alpha p(-1) = \alpha p(1) = (\alpha p)(1)$.

(b) $\{p \in \mathcal{P}_1 : p(1) = 1\} \subseteq \mathcal{P}_1$

0 ist nicht in der Menge.

(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

0 ist nicht in der Menge.

(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 5\} \subseteq \mathbb{R}^2$

0 ist nicht in der Menge.

√ (e) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 4x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

√ (f) $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = 4x_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$