D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 5

1. Seien $\vec{l}_k$ und $\boldsymbol{L_k}$ der Vektor und die Matrix:

$$\vec{l}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ l_{k+2,k} \\ \vdots \\ \\ l_{n,k} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L_k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & l_{k+2,k} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & l_{n,k} & & & & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} + \vec{l}_k \vec{e}_k^{\top}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\boldsymbol{L_k}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & -l_{k+2,k} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & -l_{n,k} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\boldsymbol{L_k L_{k+1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & l_{k+2,k} & l_{k+2,k+1} & \ddots & \\ & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ & & l_{n,k} & l_{n,k+1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

2. Sei $a, b, c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}^\top, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \end{pmatrix}^\top$$

eine Basis für $\mathbb{C}^3$ ist.

3. Betrachten Sie $V = \mathcal{P}_3$.

a) Sei $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ und $\mathcal{B}' = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, wobei die Polynome durch

$$\begin{array}{llll} p_0(t) = 1, & p_1(t) = t, & p_2(t) = t^2, & p_3(t) = t^3, \\ q_0(t) = t - 1, & q_1(t) = t + 1, & q_2(t) = (t-1)^3, & q_3(t) = (t+1)^3. \end{array}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V sind.

b) Geben sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ des Basiswechsels zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ an.

4. MATLAB-Aufgabe - Pivotisierte LR-Zerlegung **(Korrektur durch Assistenten)**

a) Erweitern Sie die LR-Zerlegung der Übungsserie 4 zu einer MATLAB-Funktion

```
[L, R, P] = lrp(A)
```

zur Berechnung der LR-Zerlegung mit Zeilentauschen $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$. Ihre Funktion soll zusätzlich zu $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ auch die Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ zurückgeben. Wählen Sie in jedem Schritt das Pivotelement mit maximalem Absolutbetrag.

b) Testen Sie Ihre Implementierung mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Matrizen $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ aus.

5. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume?

(a) $V := \big\{(s - 2r,\ r,\ 2s) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r, s \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) $W := \big\{(s - 2, 1, 2s)^\top \in \mathbb{R}^3 \ : \ r, s \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Siehe nächstes Blatt!

2. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{Q}_n(\beta) := \big\{p : p \in \mathcal{P}_n$ und $p(1) = \beta\big\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{P}_n$?

(a) $\beta = 1$

(b) $\beta = 0$

(c) $\beta \notin \{0, 1\}$

(d) Alle $\beta \in \mathbb{R}$

3. Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume?

(a) $\{p \in \mathcal{P}_1 : p(-1) = p(1)\} \subseteq \mathcal{P}_1$

(b) $\{p \in \mathcal{P}_1 : p(1) = 1\} \subseteq \mathcal{P}_1$

(c) $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(d) $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 5\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(e) $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 4x_2\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(f) $\big\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = 4x_2\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Abgabe: Do/Fr 03./04. November 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`