D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 6

1. Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ im Vektorraum V.

$a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ sind **linear abhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + ... + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = ... = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear unabhängig**.

Falls jeder Vektor b von V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **erzeugend**.

Falls V die Dimension n hat, gilt allgemein:

- Falls $k < n$, sind $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **nicht erzeugend**.
- Falls $k > n$, sind $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **linear abhängig**.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4) und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mithilfe der Gauss–Elimination systematisieren: Schreibe $A = a^{(1)}...a^{(k)}$. A ist eine $n \times k$-Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Schema können wir $r = \operatorname{Rang} A$ finden.

Die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

Sie bilden also eine Basis für $\mathbb{R}^n$, falls $r = k = n$.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit also $n = 3, k = 2, r = 1$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

Bitte wenden!

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also gilt $n = 4, k = r = 3$. Da $r = k$ sind die Vektoren linear unabhängig und da $r \neq n$ nicht erzeugend.

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

also $n = k = r = 3$, und damit sind die Vektoren linear unabhängig und erzeugend (d.h. bilden eine Basis).

d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

also $r = n = 3$, $k = 4$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = n$ sind sie erzeugend.

2. a) Wir wissen, dass eine Basis von $\mathcal{P}_3$ aus 4 Polynomen besteht, da eine Basis die Monombasis $1, x, x^2, x^3$ ist. Wir müssen also nur zeigen, dass p_1, p_2, p_3, p_4 ein Erzeugendensystem ist, d.h. ein beliebiges Polynom $p \in \mathcal{P}_3$ als Linearkombination $p = ap_1 + bp_2 + cp_3 + dp_4$ darstellbar ist. Sei $p = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$. Dann suchen wir die Koordinaten a, b, c, d so dass

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + dp_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3.$$

Wir sammeln in der linken Seite die Koeffizienten der Monomterme und erhalten dann durch Koeffizientenvergleich das folgende Gleichungssystem für a, b, c, d:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & x_1x_2 & -x_1x_2x_3 \\ 0 & 1 & -x_1 - x_2 & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1 - x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssytem hat bereits oberer Dreiecksgestalt und wir lesen damit direkt ab, das beliebigen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ eindeutige Koeffizienten a, b, c, d zugeordnet sind. p_1, p_2, p_3, p_4 ist damit eine Basis.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir setzen im Gleichungssystem aus **a)** $x_1 = 1, x_2 = 2$ und $x_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtssubstitution gibt dann: $d = 1, c = 7, b = 11$ und $a = 4$.

c) Wir suchen nun a, b, c, d, so dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i) + bp_2(x_i) + cp_3(x_i) + dp_4(x_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Das ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 28 \\ 64 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten durch Vorwärtssubstitution: $a = 1, b = 8, c = \frac{11}{2}, d = 1$.

3. **a)** Nein. Zum Beispiel ist die Nullmatrix nicht in der Menge.

b) Wir haben

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}_1 - 6\mathbf{A}_2 \\ F(\mathbf{A}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_2 \\ F(\mathbf{A}_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}_1 + 3A_3 - 6\mathbf{A}_4 \\ F(\mathbf{A}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}_2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $\dim \mathrm{Im}(F) = \mathrm{Rang}(\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}, \mathcal{B})) = 3$.

4. **a)** Jede lineare Funktion f_i muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$f_i(\alpha\mathbf{B}) = \alpha f_i(\mathbf{B}) \qquad \text{und} \qquad f_i(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = f_i(\mathbf{B}) + f_i(\mathbf{C})$$

Bitte wenden!

Wir haben

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha\mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \alpha f_1(\mathbf{B}),\\
f_2(\alpha\mathbf{B}) &= (\alpha\mathbf{B})\mathbf{A} = \alpha(\mathbf{B}\mathbf{A}) = \alpha f_2(\mathbf{B}),\\
f_1(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} = f_1(\mathbf{B})+f_1(\mathbf{C}),\\
f_2(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A} = f_2(\mathbf{B})+f_2(\mathbf{C}),
\end{aligned}$$

also sind f_1 und f_2 lineare Funktionen. Für f_3 haben wir $f_3(\mathbf{B}) = f_1(\mathbf{B}) - f_2(\mathbf{B})$, also ist f_3 eine Linearkombination aus f_1 und f_2 und damit wieder linear.

$$\begin{aligned}
f_3(\alpha\mathbf{B}) &= f_1(\alpha\mathbf{B}) - f_2(\alpha\mathbf{B}) = \alpha f_1(\mathbf{B}) - \alpha f_2(\mathbf{B})\\
&= \alpha\big(f_1(\mathbf{B}) - f_2(\mathbf{B})\big) = \alpha f_3(\mathbf{B}),\\
f_3(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= f_1(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - f_2(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \big(f_1(\mathbf{B})+f_1(\mathbf{C})\big) - \big(f_2(\mathbf{B})+f_2(\mathbf{C})\big)\\
&= \big(f_1(\mathbf{B}) - f_2(\mathbf{B})\big) + \big(f_1(\mathbf{C}) - f_2(\mathbf{C})\big) = f_3(\mathbf{B}) + f_3(\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

b) f_1 und f_2 sind invertierbar mit Inversen $f_1^{-1}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ und $f_2^{-1}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$

c) $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Dann wird $f_3(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$, was nicht invertierbar ist.

Siehe nächstes Blatt!

5. MATLAB-Aufgabe

```
function a=interpol(t,f)
    % t=[t1, ... tn] Stuetzstellen
    % f=[f1, ... fn] Funktionswerte
    % a=[a1, ... an] Koeffizienten
    n=size(t,2);

    % Direkter Weg 1
    % A=zeros(n,n)
    % for i=1:n
    %   A(i,1)=1;
    %   for j=2:i
    %     A(i,j)=A(i,j-1) * (t(i)-t(j-1));
    %   end
    % end
    % a=A\f';

    % Direkter Weg 2
    A=zeros(n,n)
    A(:,1)=1
    for j=2:n
        A(:,j)=A(:,j-1).*(t-t(j-1))';
    end
    a=A\f';

    % Newton Schema
    % F=zeros(n,n);
    % F(:,1)=f';
    % for j=2:n
    %   F(j:n,j)=(F(j:n,j-1)-F(j-1:n-1,j-1))./(t(j:n)-t((j:n)-j+1))';
    % end
    % a=diag(F)';
end
```

Bitte wenden!

6. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ |x_1| \end{pmatrix}$$

Die Funktion $g(x) = |x|$ ist nichtlinear, weil $g(x+y) \neq g(x) + g(y)$ wenn $x < 0 < y$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine gegebene $n \times n$ Matrix und $\mathbf{b}$ ein gegebener n-Vektor, die beide nicht gleich Null sind.

$f(x) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ist nur linear, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

√ (c) $f :: \mathcal{P}_n \to: \mathcal{P}_n$ mit $f(p) = q$, wobei $q \in \mathcal{P}_n$ das Polynom

$$q(t) = p(t+1) - p(t)$$

bezeichnet.

Sei $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren $q_1 = f(p_1), q_2 = f(p_2), q_3 = f(p_1 + p_2)$ und $q_4 = f(\alpha p_1)$. Dann ist

$$q_3(t) = (p_1{+}p_2)(t{+}1) - (p_1{+}p_2)(t) = (p_1(t{+}1) - p_1(t)) + (p_2(t{+}1) - p_2(t)) = q_1(t) + q_2(t),$$

und also $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$. Weiter,

$$q_4(t) = (\alpha p_1)(t+1) - (\alpha p_1)(t) = \alpha(p_1(t+1) - p_1(t)) = \alpha q_1(t),$$

und also $f(\alpha p_1) = \alpha f(p_1)$.

√ (d) $f : \mathcal{P}_n \to: \mathcal{P}_n$ mit $f(p) = q$, wobei $q \in \mathcal{P}_n$ das Polynom

$$q(t) = p(t+1) - p(1)$$

bezeichnet.

Gleich wie oben.

Siehe nächstes Blatt!

2. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume mit Dimensionen n und m, wobei $n < m$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Funktion. Kann f dann

$\surd$ (a) injektiv sein?

(b) surjektiv sein?

(c) invertierbar sein?

Mit Hilfe der Dimensionsformel: $n = \dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ sieht man, dass f nicht surjektiv sein kann, da sonst $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W = m$ gelten würde. Wir haben aber $n < m$. Da f nicht surjektiv ist, kann es auch nicht bijektiv sein und deshalb auch nicht invertierbar.