Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 6

1. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen, ob die Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Wir betrachten zu 3 Punkten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ die folgenden 4 Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1, \\ p_2(x) &= (x - x_1), \\ p_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2), \\ p_4(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass p_1, p_2, p_3, p_4 eine Basis des $\mathcal{P}_3$ bilden.

b) Sei nun $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Bestimmen sie die Koordinaten von $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ bezüglich der Basis p_1, p_2, p_3, p_4.

c) Ein Polynom p aus $\mathcal{P}_3$ ist durch die Funktionswerte $p(x_i)$ an vier paarweise verschiedenen Punkten x_i, $1 \leq i \leq 4$ eindeutig bestimmt. Gegeben seien die Wertepaare:

x_i	1	2	3	4
$p(x_i)$	1	9	28	64

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Polynoms bezüglich der Basis aus **b)**.

3. **(Korrektur durch Assistenten)** Die Menge $\mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $n \times n$ Matrizen bildet mit der Matrixaddition und der Skalarmultiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Im folgenden betrachten wir den Vektorraum für den Spezialfall $n = 2$. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$, wobei

$$\mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Ist die Menge der reellen und invertierbaren 2×2-Matrizen ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wir definieren

$$F(\mathbf{B}) = 3\mathbf{AB} - \mathbf{BA}, \qquad \text{wobei} \qquad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. (Hier können Sie Matlab für die Matrixmultiplikationen benutzen.)

c) Was ist $\dim \mathrm{Im}(F)$?

4. Sei $V := \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der reellen $n \times n$ Matrizen. Für ein $\boldsymbol{A} \in V$ definieren wir

$$f_1(\boldsymbol{B}) := \boldsymbol{AB}, \qquad f_2(\boldsymbol{B}) := \boldsymbol{BA}, \qquad f_3(\boldsymbol{B}) := \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}.$$

a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2 und f_3 lineare Abbildungen sind.

b) Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 Isomorphismen sind, wenn $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist.

c) Geben Sie eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{A}$ an, so dass f_3 *kein* Isomorphismus ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

5. MATLAB-Aufgabe

In **3 c)** haben wir zu 4 gegeben Wertepaaren das eindeutig bestimmte Polynom aus $\mathcal{P}_3$ berechnet, indem wir die Koordinaten zu einer Basis bestimmt haben. Schreiben Sie nun eine MATLAB-Routine **interpol.m**, die zu beliebigen Interpolationsdaten

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$p(x_i)$	y_1	y_2	y_3	y_4

die Koordinaten bezüglich der Basis p_1, p_2, p_3, p_4 bestimmt. Überprüfen Sie ihre MATLAB-Routine anhand den Ergebnissen von **3 c)**.

Siehe nächstes Blatt!

6. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ |x_1| \end{pmatrix}$$

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine gegebene $n \times n$ Matrix und $\mathbf{b}$ ein gegebener n-Vektor, die beide nicht gleich Null sind.

(c) $f :: \mathcal{P}_n \to: \mathcal{P}_n$ mit $f(p) = q$, wobei $q \in \mathcal{P}_n$ das Polynom

$$q(t) = p(t+1) - p(t)$$

bezeichnet.

(d) $f : \mathcal{P}_n \to: \mathcal{P}_n$ mit $f(p) = q$, wobei $q \in \mathcal{P}_n$ das Polynom

$$q(t) = p(t+1) - p(1)$$

bezeichnet.

2. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume mit Dimensionen n und m, wobei $n < m$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Funktion. Kann f dann

(a) injektiv sein?

(b) surjektiv sein?

(c) invertierbar sein?

Abgabe: Do/Fr 10./11. November 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`