D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Musterlösung 7

1. **a)** Man sieht sofort, dass $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) Die Transformationsmatrizen des Basiswechsels $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_2$ zwischen $\mathcal{B}_e$ und $\mathcal{B}_1$ bzw. zwischen $\mathcal{B}_e$ und $\mathcal{B}_2$ lauten

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Koordinatendarstellung gilt dann $\vec{\xi}_i = \boldsymbol{T}_i^{-1}\vec{\xi}_e$ für $i = 1,2$ mit $\vec{\xi}_e = \vec{v}$ ($\vec{v}$ ist bezüglich der Standardbasis gegeben). Somit erhalten wir aus

$$\boldsymbol{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\vec{v} = (\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 3)^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T}_2^{-1}\vec{v} = (-1,\ -1,\ 3)^\top.$$

c) Aus dem Kommutativen Diagramm aus Abbildung 5.48 im Skript folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta - \sin\vartheta & -\cos\vartheta - \sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta + \cos\vartheta & \cos\vartheta - \sin\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta & -2\cos\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta + \sin\vartheta & \cos\vartheta - \sin\vartheta & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{A}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1^{-1}\vec{v}. \end{aligned}$$

d) Für ein beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ haben wir

$$\begin{aligned} \|F(\vec{x})\| &= \left((x_1 \cos\vartheta - x_2 \sin\vartheta)^2 + (x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta)^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x_1^2 \cos^2\vartheta - 2x_1x_2 \cos\vartheta \sin\vartheta + x_2^2 \sin^2\vartheta + x_1^2 \sin^2\vartheta \right. \\ &\quad \left. + 2x_1x_2 \cos\vartheta \sin\vartheta + x_2^2 \cos^2\vartheta + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x_1^2 \cos^2\vartheta + x_1^2 \sin^2\vartheta + x_2^2 \cos^2\vartheta + x_2^2 \sin^2\vartheta + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

und somit bleibt die Länge wie erwartet unverändert. Eine solche Abbildung heisst *längentreu*.

2. a) Wir haben

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A} \quad b) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 12 & -2 & 22 & -12 \\ 6 & 10 & 2 & 22 & -10 \\ -3 & 6 & -12 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 22 & -22 & 22 & -22 \\ 0 & 22 & -22 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 22 & -22 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{R} \quad b'). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Matrix $\boldsymbol{R}$ hat 2 Pivotelemente, und folglich ist $\operatorname{rang} F = 2$. Dann wird

$$\dim \operatorname{Ker} F = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rang} F = 4 - 2 = 2.$$

F ist injektiv falls die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.
F ist surjektiv falls der $\operatorname{rang} F = \dim R^4$.
F ist demnach weder injektiv noch surjektiv:

b) Falls $Fx = 0$, dann muss auch $\boldsymbol{R}x = 0$:
Ker $\boldsymbol{A} = \{x : \boldsymbol{A}x = 0\} = \{x : \boldsymbol{R}x = 0\} = \operatorname{span}\{\overline{x}_1, \overline{x}_2\}$

$\overline{x}_1$:
setze $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$, damit ist $x_1 = -2x_4$ und $x_2 = -x_4$, oder

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{x}_2$:
setze $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$, damit ist $x_1 = -2x_3$ und $x_2 = x_3$, oder

$$\overline{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\operatorname{Ker} F = \operatorname{span}\{\overline{x}_1, \overline{x}_2\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiter, weil Spalten 1 und 2 linear unabhängig sind (sie haben Pivotelemente in $\boldsymbol{R}$), sind diese Spalten Basiselemente für Bild F:

$$\operatorname{Bild} F = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Eine Lösung x_0 von $\boldsymbol{A}x = b$ findet man mit Rückwärtseinsetzen in $\boldsymbol{R}x = b'$ wobei wir $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ einsetzen.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung von $\boldsymbol{A}x = b$ ist $x_0 + \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2$

Bitte wenden!

3. **a)**

```
function d = polDim(u)
        d=find(u ~= 0,1,'last');
        if (numel(d) == 0)
                d=0;
        end
end

function [u,d] = polTruncate(u)
% Truncates the representation by dropping off zeros at the end
% Every nonzero polynomial of degree d-1 is represented as an n x 1-matrix
% with n >= d. Here, we drop the zeros in the postions d+1,...,n
% The zero polynomial is represented by the empty 0 x 1-matrix

        d=polDim(u);
        u=u(1:d);
        u=u(:); % if it's of size 1 x 0, we reshape it into a 1 x 0-matrix

return
end

function [u,d] = polExtend(u,D)
% Extends the representation by adding zeros at the end,
% in the entries d+1,...,D

        d=polDim(u);
        u=[u(1:d);zeros(D-d,1)];

return
end

function deg = polDegree(u)
        deg=polDim(u)-1;
        if (deg == -1)
                deg = 0;
        end
end

function w = polSum(u,v)
        [u,du]=polTruncate(u);
        [v,dv]=polTruncate(v);
        D=max(du,dv);
        u=polExtend(u,D);
        v=polExtend(v,D);
        w=u+v;
        w=polTruncate(w);
end

function w = polScalarMult(u,a)
        w=a*u;
```

Siehe nächstes Blatt!

```
        w=polTruncate(w);
end
```

```
function w = polDiff(u)
        d=polDim(u);
        if (d <= 1)
                w=zeros(0,1);
                return
        end
        w=u(2:d).*(1:d-1)';
end
```

```
function w = polProd(u,v)
        I=polDim(u);
        J=polDim(v);
        w=zeros(I+J-1,1);
        for i=0:I-1
                for j=0:J-1
                        w(i+j+1)=w(i+j+1)+u(i+1)*v(j+1);
                end
        end
end
```

b) Die Vektoren u und v repräsentieren die Polynome $\mathfrak{P}\mathrm{u}$ und $\mathfrak{P}\mathrm{v}$, die durch $(\mathfrak{P}\mathrm{u})(x) = 2x^2 + 3$ und $(\mathfrak{P}\mathrm{v})(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ für alle x definiert werden.

```
>> u=[3; 0; 2; 0];
>> v=[1; -2; 3; -1; 2];
>> polDegree(u)

ans =

     2

>> polSum(u,v)'

ans =

     4    -2     5    -1     2

>> polScalarMult(u,-3)'

ans =

    -9     0    -6

>> polDiff(v)'
```

Bitte wenden!

```
ans =

    -2     6    -3     8

>> polProd(u,v)'

ans =

     3    -6    11    -7    12    -2     4
```

4. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

Siehe nächstes Blatt!

1. Eine Basis des Kerns von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch:

√ (a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Matrix lässt sich mit dem Gaussverfahren umformen zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Lösungen des Gleichungssystems $\mathbf{A}x = 0$ $x_2 = -x_3 - 2x_4$ $x_1 = \frac{x_3+2x_4+x_3-2x_4}{2} = x_3$ wobei x_3 und x_4 freie Paramter sind. Der Kern von $\mathbf{A}$ hat Dimension 2.

(b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Jede Basis vom Kern von $\mathbf{A}$ hat nur 2 Elemente.

(c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Falsch, Vektoren in $\mathbb{R}^3$ liegen nicht im Kern von $\mathbf{A}$

(d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Falsch,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist keine Lösung von $\mathbf{A}x = 0$.

Bitte wenden!

2. Gegeben sei die reelle Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 - 2a \\ -2 & -1 & a-1 & 3 \end{pmatrix}$$

welche der folgenden Aussagen sind korrekt?:

√ (a) Falls $a = 0$ gilt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$

Die Matrix lässt sich mit dem Gaussverfahren umformen zu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-2) \\ 0 & 0 & a & a(2-a) \end{pmatrix}$$

Wenn $a = 0$ ist, hat die Matrix nur zwei linear unabhängige Zeilen, daher gilt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$

(b) Falls $a = 0$ gilt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$

√ (c) $\mathbf{A}$ ist invertierbar $\Longleftrightarrow \operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$

Eine Matrix mit vollem Rang ist invertierbar.

√ (d) $\operatorname{rang} \mathbf{A} > 1$

Für alle Werte von a hat $\mathbf{A}$ mindestens zwei linear unabhängige Spalten, daher ist $\operatorname{rang} \mathbf{A}$>1.