D-INFK Lineare Algebra HS 2016
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 7

1. (Korrektur durch Assistenten) Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)^\top \mapsto (x_1 \cos\vartheta - x_2 \sin\vartheta,\ x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta, x_3)^\top$$

für einen beliebigen Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

a) Wie lautet die Abbildungsmatrix A, welche die lineare Abbildung F in der Standardbasis $\mathcal{B}_e = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ darstellt?

b) Wir wollen in $\mathbb{R}^3$ neben der Standardbasis $\mathcal{B}_e$ noch die schiefen Basen

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

einführen. Berechnen sie die Transformationsmatrizen des Basiswechsels $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_2$ zwischen $\mathcal{B}_e$ und $\mathcal{B}_1$ bzw. zwischen $\mathcal{B}_e$ und $\mathcal{B}_2$. Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{v} = (1,\ 2,\ 3)^\top$ bezüglich den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$?

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\boldsymbol{B}$, die F in den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ darstellt. Betrachten Sie dazu das Diagramm aus Abbildung 5.48 im Skript. Überprüfen Sie für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dass gilt: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1^{-1}\vec{v} = \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{A}\vec{v}$.

d) Berechnen Sie $\|F(\vec{x})\|$ für ein beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Fällt Ihnen etwas besonderes auf?
Bemerkung: Die Abbildung F beschreibt eine Rotation um den Winkel ϑ um die z-Achse. Man würde intuitiv erwarten, dass eine Rotation die Länge eines Vektors nicht verändert. Benutzen Sie die trigonometrische Identität $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$.

2. Wir definieren die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ als

$$F(x) = Ax, \qquad \text{wobei} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 12 & -2 & 22 \\ 6 & 10 & 2 & 22 \\ -3 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{weiter ist} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Kern} F$ und $Rang\ F$. Ist F injektiv oder surjektiv?

b) Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern} F$ und $\operatorname{Bild} F$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x von $\boldsymbol{A}x = b$.

Bitte wenden!

3. MATLAB-Aufgabe: **Polynome und Multiplikation von Polynomen**

Für jeden Vektor $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$ kann man ein entsprechendes Polynom $\mathfrak{P}u \in \mathcal{P}_n$ wie folgt bilden:

$$(\mathfrak{P}u)(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n \quad \text{für alle } t. \tag{1}$$

Umgekehrt kann man für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ definiert durch $p(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n$ für alle t einen entsprechenden Vektor

$$u = \mathfrak{P}^{-1} p = (u_0, u_1, \dots, u_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{2}$$

betrachten. Die Abbildungen $\mathfrak{P} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ und $\mathfrak{P}^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, die durch (1) und (2) definiert werden, sind linear und Umkehrabbildungen voneinander.

Damit kann in MATLAB p als ein Vektor `u` repräsentiert werden, mit `u(k)` $= u_{\mathtt{k}-1}$ für $\mathtt{k} = 1, \dots, n+1$.

a) Schreiben Sie die folgenden MATLAB-Funktionen:

- `function deg = polDegree(u)`, die den Grad des Polynoms p, das durch `u` dargestellt wird, zurückgibt.
- `function w = polSum(u,v)`, die die Vektordarstellung der Summe der Polynome zurückgibt.
- `function w = polScalarMult(u,a)`, die die Vektordarstellung des Produktes $\mathtt{a}p$ zurückgibt, wobei $\mathtt{a} \in \mathbb{R}$ ein Skalar ist und p das Polynom, das durch `u` dargestellt wird.
- `function w = polDiff(u)`, die die Vektordarstellung der Ableitung p' zurückgibt, wobei p das Polynom ist, das durch `u` dargestellt wird.
- `function w = polProd(u,v)`, die die Vektordarstellung des Produktes pq zurückgibt, wobei p und q die Polynome sind, die durch `u` und `v` dargestellt werden.

b) Geben Sie die Rückgabewerte der Befehle

```
polDegree(u),            polDiff(v),      polSum(u,v),
polScalarMult(u,-3),     polProd(u,v)
```

aus, wobei `u=[3; 0; 2; 0]` und `v=[1; -2; 3; -1; 2]` sind. Welche Polynome repräsentieren `u` und `v`?

Siehe nächstes Blatt!

4. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Eine Basis des Kerns von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch:

(a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Bitte wenden!

2. Gegeben sei die reelle Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 - 2a \\ -2 & -1 & a-1 & 3 \end{pmatrix}$$

welche der folgenden Aussagen sind korrekt?:

(a) Falls $a = 0$ gilt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$

(b) Falls $a = 0$ gilt $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$

(c) $\mathbf{A}$ ist invertierbar $\iff \operatorname{rang} \mathbf{A} = 4$

(d) $\operatorname{rang} \mathbf{A} > 1$

Abgabe: Do/Fr 17./18. November 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`