Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 8

1. Seien $\mathbf{a} = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top \right\}$ die gegebene Basis und $\mathbf{b} = \left\{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \right\}$ die gesuchte Orthonormalbasis.

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^\top$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2}{\left\|\tilde{\mathbf{b}}_2\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^\top$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_3 &= \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 - \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 \\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top\end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_3}{\left\|\tilde{\mathbf{b}}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top &= \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \mathbf{b}_1 \right\rangle \mathbf{b}_1 + \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \mathbf{b}_2 \right\rangle \mathbf{b}_2 + \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \mathbf{b}_3 \right\rangle \mathbf{b}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top \right\rangle \mathbf{b}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^\top \right\rangle \mathbf{b}_2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top \right\rangle \mathbf{b}_3 \\ &= 3\sqrt{2}\mathbf{b}_1 + \frac{14}{\sqrt{6}}\mathbf{b}_2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_3\end{aligned}$$

2. **a)** Für das Skalarprodukt müssen wir zeigen:

- Linearität in der zweiten Komponente:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle_\mathbf{M} = \mathbf{x}^\top \mathbf{M}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y}_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle_\mathbf{M} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle_\mathbf{M}$$

$$\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle_{\mathbf{M}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{M}(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}^\top \mathbf{M}(\mathbf{y}) = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{M}}$$

Wir haben benutzt, dass für die Matrixmultiplikation das Distributionsgesetz gilt und dass Skalare aus Produkten von Matrizen herausgezogen werden dürfen.

- Symmetrie:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{M}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y})^\top = \mathbf{y}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle_{\mathbf{M}}$$

Da $\mathbf{M}$ und die 1×1-Matrix $\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y}$ symmetrisch sind.

- Positive Definitheit:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_{\mathbf{M}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0$$

und

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$$

Weil $\mathbf{M}$ positiv definit ist.

b) Seien $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top\}$ die Standartbasis und $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ die gesuchte Orthonormalbasis bezüglich des $\mathbf{M}$-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}}_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{b}_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1}{\left\|\tilde{\mathbf{b}}_1\right\|_{\mathbf{M}}} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1}{1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top = \mathbf{e}_1 \\[2ex]
\tilde{\mathbf{b}}_2 &= \mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_1\rangle_{\mathbf{M}} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2}{\left\|\tilde{\mathbf{b}}_2\right\|_{\mathbf{M}}} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2}{1} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^\top \\[2ex]
\tilde{\mathbf{b}}_3 &= \mathbf{e}_3 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b}_1\rangle_{\mathbf{M}} \mathbf{b}_1 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b}_2\rangle_{\mathbf{M}} \mathbf{b}_2 \\
&= \begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^\top \\
\mathbf{b}_3 &= \frac{\tilde{\mathbf{b}}_3}{\left\|\tilde{\mathbf{b}}_3\right\|} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_3}{1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^\top
\end{aligned}$$

3. a) Die Parsevalsche Formel besagt, dass der Winkel zwischen zwei Vektoren durch eine Koordinatentransformation nicht verändert wird, falls wir eine orthonormale Basis haben. Somit können wir eine Koordinatentransformation von $\mathcal{P}_3^{[0,1]}$ zu $\mathbb{R}^4$ finden und den Winkel mit dem uns bekannten euklidischen Skalarprodukt berechnen.

b) Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir direkt:

$$\xi = (1 \quad \sqrt{3} \quad 0)^\top \quad \text{und} \quad \eta = (2 \quad 0 \quad \sqrt{5})^\top.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann berechnen wir mit Hilfe des euklidischen Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}
\|\xi\| &= \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\
\|\eta\| &= \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle} = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{5})^2} = 3 \\
\langle \xi, \eta \rangle &= 2
\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir $\angle(\xi, \eta) = \arccos\left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\eta\| \|\xi\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5^\circ$.

4. **a)** Der Gram-Schmidt Algorithmus kann wie folgt implementiert werden.

```
function B = gramSchmidt(A, scalar_prod)
    [n, m] = size(A);
    B = zeros(n, m);
    for k = 1:m
        v = A(:,k);
        for j = 1:k-1
            v = v - scalar_prod(B(:,j), A(:,k)) * B(:,j);
        end
        B(:,k) = v / sqrt(scalar_prod(v, v));
    end

end
```

b) Folgende Befehle testen die Funktion mit dem Euklidischen Skalarprodukt.

```
>> A =[3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
>> scalar_prod1 = @(x,y)x'*y;
>> gramSchmidt(A, scalar_prod1)

ans =

     1     0     0
     0    -1     0
     0     0     1
```

c) Folgende Befehle testen die Funktion mit dem alternativen Skalarprodukt:

```
>> C = [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
>> scalar_prod2 = @(x,y) y'*C*x;
>> gramSchmidt(A, scalar_prod2)

ans =

    0.7071    0.4082   -0.2887
         0   -0.8165   -0.2887
         0         0    0.8660
```

Bitte wenden!

Es soll dazu motiviert werden, schon bei diesen kleineren Aufgaben eine `Call`-File zu schreiben, in der die Funktion aufgerufen wird. Ein Beispiel dazu wäre:

```
disp('----------------------------------')
disp(' Lineare Algebra 2015, Aufgabe 4')

%%% SUBPROBLEM a) %%%
clear all, close all

%% Define Input for gramSchmidt function
A = [3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
scalar_prod = @(x,y) x'*y;

%% Run function
B = gramSchmidt(A, scalar_prod);
disp('Teilaufgabe a)')
disp('  Das berechnete Orthonormalsystem lautet: ')
disp(B)

%%% SUBPROBLEM b) %%%
clear all,close all
%% Define Input for gramSchmidt function
M = [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
A = [3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
scalar_prod = @(x,y) x'*M*y;

%% Run function
B = gramSchmidt(A, scalar_prod);
disp('Teilaufgabe b)')
disp('  Das berechnete Orthonormalsystem lautet: ')
disp(B)
disp('----------------------------------')
```

5. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

Siehe nächstes Blatt!

1. Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A}_1 = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2]$ und $\boldsymbol{A}_2 = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]$ mit den Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Es sollen die vier fundamentalen Unterräume der Matrizen untersucht werden. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a)

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{A}_1\vec{x} = 0\right\} = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Der Nullraum von $\boldsymbol{A}_1$ besteht einzig aus dem Null-Vektor da die beiden Spalten linear unabhängig sind.

(b)

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{A}_2\vec{x} = 0\right\} = \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Die dritte Spalte von $\boldsymbol{A}_2$ ist linear abhänging von den ersten beiden, deswegen muss der Nullraum von einem Nicht-Null-Vektor aufgespannt werden. In diesem Fall ist das $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}_2) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

(c)

$$\dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{A}_1^H) = \dim\left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 :\ \vec{y} = \boldsymbol{A}_1^H\vec{x}\right\} = \dim\ \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = 3$$

$\vec{y}$ ist Element von $\mathbb{R}^2$. Zudem können Vektoren in $\mathbb{R}^2$ keinen 3-Dimensionalen Raum aufspannen.

√ (d)

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}_1^H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{A}_1^H\vec{x} = 0\right\} = \mathrm{span}\left\{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Für $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}_1^H$ gilt, dass im $\mathbb{R}^3$ der orthogonale Vektor bezüglich zwei gegebenen, nicht linear abhängigen Vektoren dessen Kreuzprodukt entspricht.

√ (e)

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}_2^H = \left\{\boldsymbol{A}_2^H\vec{x} :\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Der Bildbereich von $\boldsymbol{A}_2$ hat die Dimension 2 wegen der linearen Abhängigkeit der Spalten.

Bitte wenden!

2. Bei welchen der folgenden Funktionen handelt es sich um eine Norm?

(a) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \mapsto \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

√ (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \mapsto \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}$

(c) $h : \mathcal{P}_5 \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \int_{-1}^{1} (p(t))^2 dt$

Gemäss Definition muss eine Funktion die Eigenschaften (N1)-(N3) erfüllen, um eine Norm zu sein.

- f ist keine Norm, da (N1) verletzt ist: $f\left((1 \quad 0 \quad 0)^\top\right) = 0$.
- g ist eine Norm, da sie alle Eingenschaften erfüllt:
  (N1) Quadratzahlen sind nicht-negativ und die Wurzel aus eine nicht-negativen Zahl ist wieder nicht-negativ, also gilt
  $$g(\vec{x}) = \sqrt{4 \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + 3 \underbrace{x_2^2}_{\geq 0}} \geq 0, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$
  Für den zweiten Teil nehmen win an $g(\vec{x}) = 0$. Daraus folgt $4x_1^2 + 3x_2^2 = 0$. Die Summe aus nicht-negativen Summanden ist genau dann 0 wenn jeder Summand 0 ist. Es gilt also $4x_1^2 = 3x_2^2 = 0$ und daraus folgt schliesslich $x_1 = x_2 = 0$.
  (N2)
  $$\begin{aligned} g(\alpha\vec{x}) &= \sqrt{4(\alpha x_1)^2 + 3(\alpha x_2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(4x_1^2 + 3x_2^2)} \\ &= \alpha\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \\ &= \alpha g(\vec{x}). \end{aligned}$$
  (N3) Wir wollen beweisen dass $g(\vec{x} + \vec{y}) \leq g(\vec{x}) + g(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Da beide Seiten der Ungleichung nicht-negativ sind, können wir sie zum Quadrat nehmen:
  $$\begin{aligned} (g(\vec{x} + \vec{y}))^2 &\leq (g(\vec{x}) + g(\vec{y}))^2 \\ \left(\sqrt{4(x_1 + y_1)^2 + 3(x_2 + y_2)^2}\right)^2 &\leq \left(\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} + \sqrt{4y_1^2 + 3y_2^2}\right)^2 \\ 4x_1^2 + 8x_1y_1 + 4y_1^2 + 3x_2^2 + 6x_2y_2 + 3y_2^2 &\leq 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}\sqrt{4y_1^2 + 3y_2^2} + 4y_1^2 + 3y_2^2 \\ 4x_1y_1 + 3x_2y_2 &\leq \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}\sqrt{4y_1^2 + 3y_2^2} \end{aligned}$$
  Wenn die linke Seite negativ ist sind wir hier fertig, ansonsten nehmen wir wieder beide Seiten zum Quadrat und fahren fort:
  $$\begin{aligned} 16x_1^2y_1^2 + 24x_1y_1x_2y_2 + 9x_2^2y_2^2 &\leq 16x_1^2y_1^2 + 12x_1^2y_2^2 + 12x_2^2y_1^2 + 9x_2^2y_2^2 \\ 0 &\leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2(x_1y_2)(x_2y_1) \\ 0 &\leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$
  Also ist g eine Norm.

Siehe nächstes Blatt!

- h ist keine Norm, da (N2) verletzt ist:

$$h(\alpha p) = \int_{-1}^{1} \alpha^2 (p(t))^2 dt = \alpha^2 \int_{-1}^{1} (p(t))^2 dt = \alpha^2 h(p).$$

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei T eine allgemeine Basistransformation. Ihre Inverse ist somit T^{-1}. Ist die entsprechende Basis eine orthogonale, kann man für die inverse Transformation T^H benutzen.

(b) Jeder Vektorraum mit Norm ist auch ein Vektorraum mit Skalarprodukt

√ (c) Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein normierter Vektorraum.

√ (d) Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $\mathcal{B}$ eine orthonormale Basis, so entspricht das Skalarprodukt zweier Vektoren in V dem euklidischen Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$.

√ (e) Es ist nicht möglich, jede Menge von linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum endlicher Dimension zu einer orthonormalen Basis zu ergänzen.