D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Serie 8

1. In $\mathbb{R}^3$ sei die Basis

$$\left\{(1 \quad 0 \quad 1)^\top, \qquad (1 \quad 1 \quad 0)^\top, \qquad (0 \quad 0 \quad 1)^\top\right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie daraus mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine orthonormale Basis. Stellen Sie den Vektor $(4 \quad 6 \quad 2)^\top$ in dieser Orthonormalbasis dar.

2. **(Korrektur durch Assistenten)** Es sei mit $\mathbf{M}$ eine spezielle $n \times n$-Matrix gegeben, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt, dass $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0$. Eine solche Matrix nennt man **positiv definit** (Skript 3.66).

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{y}$$

ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist (das $\mathbf{M}$-Skalarprodukt).

b) Die symmetrische Matrix

$$\mathbf{M} :\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

ist ein Beispiel einer solch positiven definiten Matrix und definiert somit ein $\mathbf{M}$-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormal ist, indem Sie, ausgehend von der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, das Verfahren von Gram-Schmidt mit dem $\mathbf{M}$-Skalarprodukt anwenden.

3. In dieser Aufgabe arbeiten wir im Vektorraum $\mathcal{P}_2^{[-1,1]}$ der reellen Polynome definiert im Intervall $[-1, 1]$ vom Grad 2. Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Gegeben ist eine orthonormale Basis bzgl. dem Skalarprodukt (1):

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(-\frac{1}{3} + t^2) \right\} \tag{2}$$

und die beiden Polynome $f(t) = \frac{3}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $g(t) = \frac{15}{2\sqrt{2}}(-\frac{1}{3} + t^2) + \sqrt{2}$.

Bitte wenden!

a) Wir interessieren uns für den Winkel $\angle(f, g)$ zwischen diesen beiden Funktionen, wollen aber vermeiden, die Integrale der Form (1) ausrechnen zu müssen. Wie hilft uns da die Parsevalsche Formel (Satz 6.5) weiter?

b) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ξ von f und η von g bzgl. der Basis (2) und berechnen Sie den Winkel $\angle(f, g)$ mit deren Hilfe.

4. MATLAB-Aufgabe **Gram-Schmidt-Algorithmus**

In dieser Aufgabe sollen Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisiereungsverfahren gemäss Algorithmus 6.1 implementieren. Wir wollen uns dabei jedoch noch nicht auf ein spezifisches Skalarprodukt beschränken, d.h. das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$ soll als eine beliebige Funktion, welche die Axiome (S1) bis (S3) des Kapitels 6.2 erfüllt, aufgefasst werden. Dadurch erhalten wir eine Implementierung das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren, welches für jedes beliebige Skalarprodukt angewendet werden kann.

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function B = gramSchmidt(A, scalar_prod)`. Dabei soll `scalar_prod` ein Function Handle sein. Das normale Euklidische Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^H\mathbf{y}$ wäre zum Beispiel die Funktion `@(x,y)x'*y`. Der erste Input `A` ist eine Matrix, die diejenigen Vektoren, die die Funktion zu einer Orthonormalbasis ergänzen soll, als Spalten erhält.

b) Testen Sie Ihren Algorithmus mit der Matrix A

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und mit dem normalen Euklidischen Skalarprodukt. Geben Sie die berechnete Orthonormalbasis B an.

c) Testen Sie Ihren Algorithmus mit der Matrix $\mathbf{A}$ und mit dem Skalarprodukt definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \mathbf{y}^H \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Geben Sie die berechnete Orthonormalbasis $\mathbf{B}$ an.

5. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

Siehe nächstes Blatt!

1. Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A}_1 = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2]$ und $\boldsymbol{A}_2 = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]$ mit den Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Es sollen die vier fundamentalen Unterräume der Matrizen untersucht werden. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a)

$$\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{A}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{A}_1 \vec{x} = 0 \right\} = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

(b)

$$\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{A}_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{A}_2 \vec{x} = 0 \right\} = \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

(c)

$$\dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{A}_1^H) = \dim \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^2 :\ \vec{y} = \boldsymbol{A}_1^H \vec{x} \right\} = \dim\ \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3$$

(d)

$$\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{A}_1^H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{A}_1^H \vec{x} = 0 \right\} = \mathrm{span}\, \{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

(e)

$$\mathrm{Im}\, \boldsymbol{A}_2^H = \left\{ \boldsymbol{A}_2^H \vec{x} :\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

2. Bei welchen der folgenden Funktionen handelt es sich um eine Norm?

(a) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \mapsto \min(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \mapsto \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}$

(c) $h : \mathcal{P}_5 \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \int_{-1}^{1} (p(t))^2 dt$

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei T eine allgemeine Basistransformation. Ihre Inverse ist somit T^{-1}. Ist die entsprechende Basis eine orthogonale, kann man für die inverse Transformation T^H benutzen.

(b) Jeder Vektorraum mit Norm ist auch ein Vektorraum mit Skalarprodukt

(c) Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein normierter Vektorraum.

(d) Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $\mathcal{B}$ eine orthonormale Basis, so entspricht das Skalarprodukt zweier Vektoren in V dem euklidischen Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$.

(e) Es ist nicht möglich, jede Menge von linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum endlicher Dimension zu einer orthonormalen Basis zu ergänzen.

Abgabe: Do/Fr 24./25. November 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`