Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 9

1. **a)** Es gilt:

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^{\mathbf{T}}\mathbf{S} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{I_3}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I_3}$$

b) Um die Spiegelebene E von $\mathbf{S}$ zu ermitteln, benutzen wir die Beziehung $\mathbf{S}n = -n$, wobei $n = (x, y, z)^{\top}$ der Normalenvektor zu E ist. Wir lösen die Gleichung $(\mathbf{S}+\mathbf{I_3})n = 0$ oder äquivalent $(3\mathbf{S} + 3\mathbf{I_3})n = 0$:

$$(3\mathbf{S} + 3\mathbf{I_3})n = \begin{pmatrix} 5x & -2y & z \\ -2x & 2y & 2z \\ x & 2y & 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauss-Algorithmus folgt:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten zwei Gleichungen sind äquivalent und egeben $y = -2z$. Daraus folgt $x = -2(-2z) - 5z = -z$ bei frei wählbarem $z \in \mathbb{R}$.

Wir können also z.B. den Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nehmen. Die Spiegelebene ist dann durch $-x - 2y + z = 0$ gegeben.

c) Für die Drehachse a der Drehung $\mathbf{R}$ muss gelten $\mathbf{R}a = a$, da die Drehachse unter der Drehung fest bleibt. Entweder sieht man direkt, dass $\mathbf{R}$ die x_2-Achse invariant lässt und damit die Drehachse der zweite Koordinatenvektor ist: $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder man berechnet die Drehachse aus der Bedingung: $\mathbf{R}a = a$. Daraus folgt $(\mathbf{R}-\mathbf{I_3})a = 0$ bzw. $(2\mathbf{R}-2\mathbf{I_3})a = 0$

$$(2\mathbf{R} - 2\mathbf{I_3})a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Man sieht, dass man a_2 frei wählen kann, z.B. $a_2 = 1$ Ausserdem erhält man die Gleichungen: $a_1 = \sqrt{3}a_3$ und $a_3 = -\sqrt{3}a_1$ und damit $a_1 = a_3 = 0$ Die Drehachse ist damit $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Um den Drehwinkel zu bestimmen, wählen wir einen Vektor der orthogonal zur Drehachse ist, wie z.B. $\mathbf{e_1}$. Das Bild von Vektor $\mathbf{e_1}$ ist dann:

$$\mathbf{Re_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Der Winkel zwischen $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{Re_1}$ ist dann

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^\top}{\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top\right\| \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^\top\right\|} = \frac{1}{2}$$

Der Drehwinkel ist damit $\alpha = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$. Für die Berechnung kann auch ein anderer Vektor orthogonal zur Drehachse verwendet werden.

2. a)

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}_{1}\mathbf{v}^\top = \mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{P}^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{A} + \underbrace{\mathbf{A}^2}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{A} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{I} - 2\mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$$

b)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\perp}_{0} + \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\parallel}_{\xi} = \xi\mathbf{v} = \mathbf{x}_\parallel\text{: Orthogonale Projektion auf Gerade } \xi\mathbf{v}$$

$\mathbf{Px} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp$: Orthogonale Projektion auf Ebene durch 0, senkrecht auf $\mathbf{v}$

$\mathbf{Hx} = (\mathbf{I}-2\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\parallel$: Spiegelung an der Ebene durch 0, senkrecht auf $\mathbf{v}$

c)

$\mathbf{H}^\top = (\mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)^\top = \mathbf{I}^\top - (2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)^\top = \mathbf{I} - 2(\mathbf{v}^\top)^\top\mathbf{v}^\top = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \mathbf{H}$, dadurch: $\mathbf{H}^\top\mathbf{H} = \mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$

d) Die Abbildungen F_A und F_P sind Projektionen, F_H ist invertierbar.

3. Die MATLAB Funktionen können wie folgt implementiert werden:

Siehe nächstes Blatt!

a)
```
function [ R ] = rotiereZ(phi)
R = [ cos(phi), -sin(phi), 0;
sin(phi), cos(phi), 0;
0, 0, 1];
end
```

b)
```
function [S] = skaliere(f)
S = diag(f);
end
```

c)
```
S = skaliere([1.5 1 1])
R = rotiereZ(30/180*pi)
P2 = R*S*P;
plot3(P2(1,:), P2(2,:), P2(3,:))
axis vis3d
axis([-2 2 -2 2 -1 2])
grid on
```

Die kombinierte Abbildung lässt sich mit `R*S` berechnen:

```
[ 1.2990 -0.5000     0
0.7500     0.8660     0
0       0       1.0000 ]
```

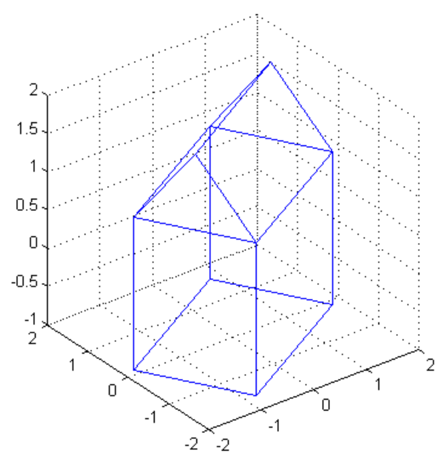

Abbildung 1: Das skalierte und rotierte Haus.

d) Eine Verschiebung ist keine lineare Abbildung. Sie gehört zu den affinen Abbildungen, siehe Kapitel 5.4 im Skript. Eine Translation wird als Vektoraddition dargestellt, die Funktion müsste also einen 3-Vektor zurückgeben den man zu jeden Punkt addiert.

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{t}$$

Bitte wenden!

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = (\mathbf{p}+\mathbf{q}) + \mathbf{t} = (\mathbf{p}+\mathbf{t}) + \mathbf{q} \neq T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q})$$

$$T(\alpha\mathbf{p}) = \alpha\mathbf{p} + \mathbf{t} \neq \alpha T(\mathbf{p})$$

4. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$$

welche der folgenden Werte sind möglich?

√ (a) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $e = \frac{1}{3}$

(c) $e = 0$

√ (d) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Die Norm des ersten Spaltenvektores muss 1 sein, also gilt $(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + e^2 = 1$ und daher $e = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(e) $a = 1, c = -1$

(f) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$

√ (g) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(h) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$

Das Skalarprodukt des ersten und zweiten Spaltenvektors muss null ergeben: $\frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}c + e0 = 0$, also muss $c = -a$ gelten. Ausserdem muss die Norm des zweiten Spaltenvektors gleich 1 sein, also $a^2 + (-a)^2 + 0 = 1$ und damit gilt $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sowie $c = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$
Wie viele verschiedene Parameterkombinationen aus a, b, c, d, e und f gibt es für $\mathbf{B}$?

(i) 0

(j) 1

(k) 2

(l) 4

√ (m) 8

(n) 16

Bitte wenden!

(o) unendlich viele

Es gibt zwei mögliche Werte von e und unabhängig davon zwei mögliche Werte für a, c. Den dritten Spaltenvektor kann man über das Vektorprodukt des ersten und zweiten Spaltenvektors bestimmen. Das Vorzeichen kann dabei frei gewählt werden. Alle möglichen Kombinationen dieser Wahlen ergeben $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Lösungen.

2. Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit der gleichen Dimension. Welche der folgenden Eigenschaften ist wahr?

(a) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{BA}$ ist nicht orthogonal.

(b) Das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{AB}$ ist nicht orthogonal.

√ (c) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind orthogonal.

(d) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind nicht orthogonal.

Es gilt: $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^{-1}$ und weiter $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1}$ und auch umgekehrt $(\mathbf{BA})^\top = (\mathbf{BA})^{-1}$