D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Serie 9

1. Gegeben seien die Abbildungsmatrizen einer Spiegelung $\mathbf{S}$ und einer Rotation $\mathbf{R}$ in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}$ und $\mathbf{R}$ orthogonale Matrizen sind.

b) Berechnen Sie die Spiegelebene von $\mathbf{S}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Spiegelung der Normalen zur Spiegelebene.

c) Berechnen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von $\mathbf{R}$.
Hinweis: $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

2. **(Korrektur durch Assistenten)** Gegeben sei ein *Einheitsvektor* $\mathbf{v}$ von $\mathbb{R}^3$. Seien die 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definiert durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{P} := \mathbf{I_3} - \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{H} : \mathbf{I_3} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{H}^2$.

b) Die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definieren lineare Abbildungen:

$$F_A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$
$$F_P : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$
$$F_H : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Beschreiben Sie die Abbildungen F_A, F_P, F_H geometrisch.
Hinweis: Zerlegen Sie den Vektor $\mathbf{x}$ in zwei Teile senkrecht und parallel zu $\mathbf{v}$, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$ mit $\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\perp = 0$ und $\mathbf{x}_\parallel = \xi\mathbf{v}$ ($\xi \in \mathbb{R}$).

c) Zeigen Sie: Die Abbildung F_H ist orthogonal.

d) Welche der drei linearen Abbildungen sind invertierbar, welche sind Projektionen?
Bemerkung: Eine lineare Abbildung $F : X \to X$ heisst *Projektion*, falls $F \circ F = F$. Die Matrix H heisst *Householdermatrix* und die Abbildung F_H *Householdertransformation*.

Bitte wenden!

3. MATLAB-Aufgabe

In dieser Aufgabe wollen wir lineare Abbildungen auf Punkte in $\mathbb{R}^3$ anwenden. Der folgende Code definiert Punkte in $\mathbb{R}^3$ die mit Linien verbunden ein Haus ergeben und generiert einen 3D-Plot davon.

```
P = [-1 -1 -1; 1 -1 -1; 1 -1 1; -1 -1 1; -1 -1 -1; -1 1 -1;
-1 1 1; -1 -1 1; -1 0 2; -1 1 1; 1 1 1; 1 1 -1; -1 1 -1; 1
1 -1; 1 -1 -1; 1 -1 1; 1 1 1; 1 0 2; 1 -1 1; 1 0 2; -1 0 2]'
plot3(P(1,:), P(2,:), P(3,:))
axis vis3d
axis([-2 2 -2 2 -1 2])
grid on
```

Wir wollen nun das Haus skalieren und rotieren in dem wir eine Skalierungsabbildung und eine Rotationsabbildung auf die einzelnen Punkte anwenden.

a) Schreiben Sie die Funktion `R = rotiereZ(phi)`, die eine Rotationsmatrix erzeugt, mit der Punkte in $\mathbb{R}^3$ um den dritten Basisvektor (die z-Achse) um den Winkel `phi` rotiert werden können.

b) Schreiben Sie die Funktion `S = skaliere(f)`, die einen 3-Vektor `f` als Argument nimmt und eine Skalierungsabbildungmatrix erzeugt, mit der Punkte in $\mathbb{R}^3$ um den jeweiligen Faktor skaliert werden können.

c) Skalieren Sie nun mithilfe der Matrix S, welche mit der Funktion skaliere erstellt wurde, das Haus um den Faktor 1.5 entlang der x-Achse und rotieren Sie es danach um 30° um die z-Achse. Speichern Sie den Plot als `haus.png` ab und schicken Sie es mit dem Code mit. Wie sieht die Matrix aus, die beide Operationen gleichzeitig ausführt?

d) Wie würde man die Funktion `T = verschiebe(t)` implementieren? Was müsste der Rückgabewert sein und wie müsste man ihn auf die Punkte anwenden? Ist diese Abbildung linear?

4. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$$

welche der folgenden Werte sind möglich?

(a) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $e = \frac{1}{3}$

(c) $e = 0$

(d) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(e) $a = 1, c = -1$

(f) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$

(g) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(h) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$

Wie viele verschiedene Parameterkombinationen aus a, b, c, d, e und f gibt es für $\mathbf{B}$?

(i) 0

(j) 1

(k) 2

(l) 4

(m) 8

(n) 16

(o) unendlich viele

Bitte wenden!

2. Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit der gleichen Dimension. Welche der folgenden Eigenschaften ist wahr?

(a) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{BA}$ ist nicht orthogonal.

(b) Das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{AB}$ ist nicht orthogonal.

(c) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind orthogonal.

(d) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind nicht orthogonal.

Abgabe: Do/Fr 1./2. Dezember 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`