Musterlösung 10

1. a) Die Normalgleichungen $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$ lauten hier

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

und ergeben $\mathbf{x} = (-1, 2)^T$

b) Das Residuum ist

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

also $||\mathbf{r}|| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

c) Wir berechnen die Spalten $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$ von $\mathbf{Q}$ aus den Spalten $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ von $\mathbf{A}$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:

$$\mathbf{q_1} = \frac{\mathbf{a_1}}{||\mathbf{a_1}||} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{w} = \mathbf{a_2} - \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle \mathbf{q_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

also $\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = 3$ und $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T$. Zusammensetzen ergibt

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge r_{ij} der Matrix $\mathbf{R}$ erhalten wir durch die Formeln

$$\begin{aligned} r_{11} &= ||\mathbf{a_1}|| = 3, \\ r_{12} &= \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{3} \langle \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T \rangle = \frac{9}{3} = 3, \\ r_{21} &= 0, \\ r_{22} &= ||\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}|| = 3 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Also ist

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{QR}.$$

Dann gilt $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y}$, also

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ an:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|_{\mathbf{W}}} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1{}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}_1}} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1{}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|_{\mathbf{W}}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}_2^\top \mathbf{W} \tilde{\mathbf{q}}_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Einträge der Rechtsdreieckmatrix $\mathbf{R}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a}_1\|_{\mathbf{W}} = 1, \\ r_{12} &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle_{\mathbf{W}} = 1, \\ r_{22} &= \|\tilde{\mathbf{q}}_2\|_{\mathbf{W}} = 1, \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Gesucht sind $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ so, dass für

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}$$

die Summe $\sum_{i=1}^{5} r_i^2$ minimal wird, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Die Normalgleichung lautet:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$$

wobei,

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $a = 2,\ b = -1/4,\ c = 1,\ d = -1/4$.

4. MATLAB-Aufgabe

a) $D^2(f(p_i)) \overset{!}{=} 0$ ist erfüllt falls wir eine maximale glatte Kurve haben, sprich eine Gerade. Die Form der original Kurve würde damit aber verloren gehen. Deshalb möchten wir mit dem zweiten Set von Gleichungen $p_i \overset{!}{=} \widetilde{p}_i$, dass der Abstand der gefundenen Punkte $\mathbf{p}$ zu den Referenzpunkten $\widetilde{\mathbf{p}}$ null ist, so dass die Form erhalten bleibt. Offensichtlich können wir nicht beide Sets von Gleichungen erfüllen. Wenn wir aber eine Lösung mit der Methode der kleinsten Quadrate suchen, können wir einen Kompromiss finden zwischen diesen beiden Bedingungen, welche eine Glättung der Kurve zur Folge hat, die der original Form ähnlich ist.

Bitte wenden!

b) $\mathbf{A}$ ist eine $2n \times n$ Matrix. Wobei n die Anzahl der gegebenen Punkte ist. Für 5 Punkte sieht sie wie folgend aus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
```
% ls_smoothing.m
function ls_smoothing(w,path)
path = 'curves/bird.txt';
w = 0.5;

xy_0 = load(path);

% we assume x and y are prepared as column-vectors
% compute the number of vertices
n=length(xy_0);

% geometry dimensions needed for the plot
xmin = min(xy_0(:,1));
xmax = max(xy_0(:,1));
ymin = min(xy_0(:,2));
ymax = max(xy_0(:,2));

% plot the original curve
close;
% plot(xy_0(:,1), xy_0(:,2), '.-');
axis([xmin xmax ymin ymax]);
axis equal;
axis off;
hold on;

% Laplacian matrix (uniform Laplacian of a closed curve)
e = ones(n,1);
L = diag(-e,0) + 0.5*(diag(e(1:end-1),1) + diag(e(1:end-1,1),-1));
L(1,n) = 0.5;
L(n,1) = 0.5;

% Add target points equations xy_0
```

Siehe nächstes Blatt!

```
A = [L;eye(n)];

% Right handsides
bx = zeros(2*n,1);
by = zeros(2*n,1);
bx(n+1:end) = xy_0(:,1);
by(n+1:end) = xy_0(:,2);

% Build equality weighting matrix W
vw = ones(2*n,1);
vw(n+1:end) = w;
W = diag(vw,0);

% Weight residuals
A = W*A;
bx = W*bx;
by = W*by;

% Solve least squares systems
% Note: The backslash operator of Matlab will automatically
% solve a least squares problem if A is overdetermined,
% therefore we don't have to formulate this explicitly.
xy(:,1) = A\bx;
xy(:,2) = A\by;

% plot the smoothed curve
plot(xy(:,1), xy(:,2), '.-');
title(sprintf('Smoothed curve'));
```

d) $\mathbf{W}$ ist eine $2n \times 2n$ Diagonalmatrix welche für die ersten n Diagonalelemente den Wert 1 hat und für die restlichen den Wert w. So werde die zweiten n kleinsten Quadrate der Differenz zu den Referenzpunkten höher gewichtet, als die der Glättung der Kurve.

5. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Kolonnen. Seien $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen mit orthonormalen Kolonnen und $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen, wobei die Diagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{R}$ positiv sind. Welche der folgenden Aussagen sind unbedingt richtig wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$ gilt?

(a) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R} = m$

$\surd$ (b) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R} = n$

(c) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R}_1 = m$

$\surd$ (d) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R}_1 = n$

(e) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1$

(f) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$

$\surd$ (g) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine reguläre Matrix

$\surd$ (h) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine orthogonale Matrix

$\surd$ (i) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine obere Dreiecksmatrix

$\surd$ (j) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine untere Dreiecksmatrix

$\surd$ (k) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine Diagonalmatrix

(l) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{I}$

Da die Kolonnen von $\boldsymbol{A}$ linear unabhängig sind, haben wir $m \geq n$. Die Kolonnen von $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{Q}_1$ sind auch linear unabhängig, deshalb müssen die Matrizen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}_1$ vollen Rang haben, nämlich n.

Die QR-Zerlegung ist für $m \geq n$ und $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$ eindeutig, wenn man die Vorzeichen der Diagonalelemente von der Dreiecksmatrix vorgibt. Weil die Diagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{R}$ positiv sind, gibt es unbedingt eine Matrix $\boldsymbol{S} = \operatorname{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1}$ erfüllt. Damit erhält man $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}$. Dieses Matrixprodukt ist immer eine Diagonalmatrix.

Aber allgemein gelten $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1$ und $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$ nicht: man kann bspw. $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1}$ und $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}$ mit $\boldsymbol{S} = \operatorname{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{I}$ nehmen.