D-INFK | Lineare Algebra | HS 2016

Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 10

1. Wir betrachten das überbestimmte Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie die Normalgleichungen auf und berechnen sie deren Lösung.

b) Bestimmen Sie das Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{Ax}$ sowie seine Norm.

c) Berechnen Sie die QR-Faktorisierung von $\mathbf{A}$ mit dem klassischen Gram–Schmidt–Verfahren (Algorithmus 7.1) und lösen Sie damit erneut das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ im Sinne der kleinsten Quadrate.

2. Kleinste Quadrate und QR-Faktorisierung: Wir definieren das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{y}$, wobei

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechne die QR-Faktorisierung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix},$$

bezüglich des Skalarprodukts $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}}$.

3. Gegeben sind die fünf Punkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \dots, 5$, wobei

x_i	0	$\pi/2$	π	$\pi/4$	$3\pi/4$
y_i	3	2	4	1	1

Bitte wenden!

Bestimmen Sie ein trigonometrisches Polynom

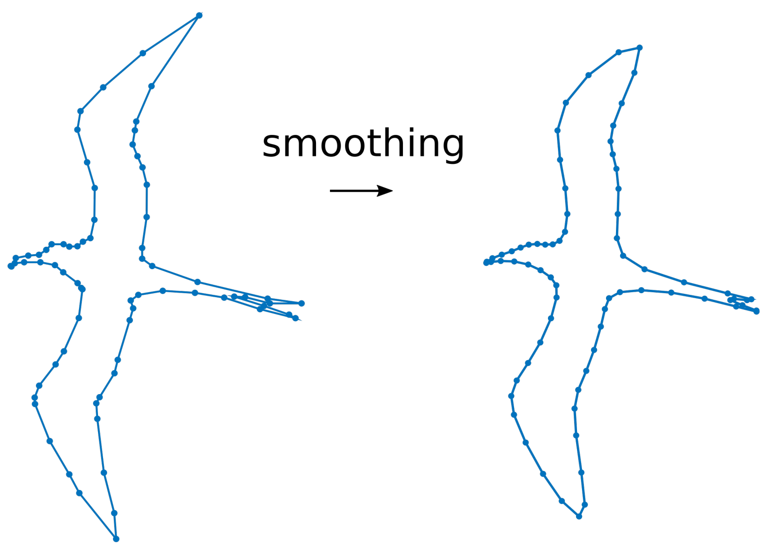
$$f \in \mathcal{P}_3, f(x) = a + b\cos(x) + c\cos(2x) + d\cos(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{5} |f(x_i) - y_i|^2$$

minimal wird. Lösen Sie $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^\top$ im Sinne der kleinsten Quadrate mittels der Normalengleichung.

4. MATLAB-Aufgabe (**Korrektur durch Assistenten**): In dieser Aufgabe wollen wir das Problem der Kurven Glättung anschauen. In vielen grafischen Anwendungen werden Kurven verwendet um geometrische Formen darzustellen. Dabei besteht eine Kurve aus mehreren miteinander durch Geraden verbundenen Punkten: Je mehr Punkte man verwendet, desto detaillier-



tere wird die Kurve. Oft können diese dadurch aber auch wackelig aussehen, gerade wenn sie von Hand am Computer gezeichnet werden. In diesen Fällen möchte man die Kurven glätten, so dass kleine Unebenheiten verschwinden, die Gesamtheit der Form aber erhalten bleibt.

Dazu berechnen wir mit Hilfe des 1D Laplace-Operators die Krümmung der stückweise linearen Kurve f für alle n Punkte p_i, jeweils separat in X und Y-Richtung.

$$D_x^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,x} + p_{i-1,x}}{2} - p_{i,x}$$
$$D_y^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,y} + p_{i-1,y}}{2} - p_{i,y}$$

p_i ist der aktuelle Punkt, p_{i-1} der vorherige und p_{i+1} der nächste der Kurve. Je spitzer die Kurve ist, desto grösser ist auch der Betrag der Laplace Werte. Damit können wir nun zwei

Siehe nächstes Blatt!

separate lineare Gleichungssysteme aufstellen in dem wir die neuen X und Y-Koordinaten für die Punkte einer gegeben geschlossenen Kurve suchen, so dass:

$$\begin{aligned} D_x^2(f(p_i)) &\stackrel{!}{=} 0 \\ p_{i,x} &\stackrel{!}{=} \widetilde{p}_{i,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y^2(f(p_i)) &\stackrel{!}{=} 0 \\ p_{i,y} &\stackrel{!}{=} \widetilde{p}_{i,y} \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{p}$ die Punkte der ungeglätteten Kurve sind.

a) Was drücken diese Gleichungen genau aus? Was will damit erreicht werden?

b) Welche Dimension hat die Koeffizienten Matrix $\mathbf{A}$ dieser linearen Gleichungssysteme? Beschreiben Sie $\mathbf{A}$ für eine geschlossene Kurve mit 5 Punkten. Eine geschlossene Kurve hat den gleichen Start und Endpunkt.

c) Offensichtlich können nicht alle Gleichungen für beliebige Kurven erfüllt werden. Formulieren Sie deshalb das Problem im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate und implementieren Sie diese in der MATLAB-Funtion *ls_smoothing*. Auf der Webpage finden sie eine Vorlage für die Funktion und verschiedene vordefinierte Kurven. Testen Sie Ihre Implementation für die Kurve *curve/bird.txt*. (Nützliche MATLAB-Befehle: \\-*Operator* oder *linsolve*, *diag*, *zeros*, *ones*)

d) Damit wir die Stärke der Glättung der Kurve besser kontrollieren können wollen wir eine Gewichtung für die Fehler der kleinsten Quadrate einführen:

$$\arg\min_{\mathbf{p}} ||\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}})||_2^2$$

$\mathbf{W}$ ist dabei eine Diagonalmatrix welche die verschiedenen Zeilen von $\mathbf{A}\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}$ mit dem jeweiligen Diagonalelement multipliziert. Wie muss $\mathbf{W}$ aussehen, so dass wir mit einem einzigen Parameter w die Wichtigkeit (Gewichtung) der Distanz der Referenzpunkte $\widetilde{\mathbf{p}}$ zu den neuen Punkten $\mathbf{p}$ erhöhen können, relative zur Glättung der Kurve? Integrieren Sie das in der Funktion *ls_smoothing* und testen Sie diese mit verschiedenen Werte für w im Bereich 0.001 bis 100.

Bitte wenden!

5. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Kolonnen. Seien $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen mit orthonormalen Kolonnen und $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrizen, wobei die Diagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{R}$ positiv sind. Welche der folgenden Aussagen sind unbedingt richtig wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$ gilt?

(a) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R} = m$

(b) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R} = n$

(c) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R}_1 = m$

(d) $\operatorname{rang} \boldsymbol{R}_1 = n$

(e) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1$

(f) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$

(g) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine reguläre Matrix

(h) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine orthogonale Matrix

(i) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine obere Dreiecksmatrix

(j) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine untere Dreiecksmatrix

(k) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1$ ist eine Diagonalmatrix

(l) $\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{I}$

Abgabe: Do/Fr 8./9. Dezember 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`