D-INFK Lineare Algebra HS 2016
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 11

1. **a)** $\det \mathbf{A} = 0 - 4 + 6 - 0 + 4 - 24 = -18$

b) Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist ungleich Null und $\mathbf{A}$ damit invertierbar.

c) Wir entwickeln zuerst nach der 4., dann nach der 2. und schliesslich nach der 3. Zeile:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\left(-3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 2\big(-3(1-2) - 2(2+1)\big) \\ &= -6\end{aligned}$$

d) Wir berechnen den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

Also ist $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{R} = 1 \cdot (-6) \cdot 3 = -18$, wie bei a).

2. Wir entwickeln nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}(\lambda) &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\big) \\ &= (3-\lambda)(2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= -\lambda(3-\lambda)^2\end{aligned}$$

Die Matrix wird genau dann singulär, wenn $\det \mathbf{A}(\lambda) = 0$, d.h. für $\lambda = 0$ und $\lambda = 3$.

Alternativ hätte man auch die Regel von Sarrus benutzen können:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}\,(\lambda) &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)+0+0-2(3-\lambda)-0-0\\ &= (3-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda)-2\big)\\ &= (3-\lambda)\lambda(\lambda-3)\\ &= -\lambda(3-\lambda)^2.\end{aligned}$$

3. a)

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^2$$

$$\det(\mathbf{B}) = \det\begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2b - 2b = 0$$

b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine schiefsymmetrische Matrix, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\mathbf{A}^\top\\ \det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{A}^\top)\\ &= \det(-\mathbf{A}^\top)\\ &= \det((-1)\cdot\mathbf{A}^\top)\\ &= (-1)^n\det(\mathbf{A}^\top)\\ &= (-1)^n\det(\mathbf{A})\end{aligned}$$

Die Gleichung $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$ (n ungerade) ist nur erfüllt für $\det \mathbf{A} = 0$ und damit gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{cases}\det(\mathbf{A}^\top) & n = 2k \qquad \forall k\in\mathbb{N}\\ 0 & n = 2k+1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 1 \\ -a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= (-a+3)^2 = a^2 - 6a + 9 \qquad \text{(Pfaffsche Determinante)}\end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{D}) = 0, \quad (\,\mathrm{grad}(\mathbf{D}) = 5,\ \text{ist ungerade})$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir betrachten den Fall der oberen Blockdreiecksmatrix und nehmen an, $\mathbf{A}$ sei ein $m \times m$ Block und $\mathbf{C}$ ein $(n-m) \times (n-m)$ Block. Es leisten nur jene Permutationen p einen Beitrag, für die $p(1), \ldots, p(m) \in \{1, \ldots, m\}$ gilt; die anderen führen auf mindestens einen Faktor aus $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Die relevanten Permutationen p haben die Form:

$$(1, \ldots, m; m+1, \ldots n) \mapsto \big(p_{\mathbf{A}}(1), \ldots, p_{\mathbf{A}}(n); m + p_{\mathbf{C}}(1), \ldots, m + p_{\mathbf{C}}(n-m)\big)$$

Mit $p_{\mathbf{A}} \in S_m$ und $p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}$ und $\operatorname{sign} p = \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}}$ wird damit:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{p_{\mathbf{A}} \in S_m \\ p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}}} \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}} \cdot a_{1,p_{\mathbf{A}}(1)} \cdots a_{m,p_{\mathbf{A}}(m)} \times$$

$$c_{1,p_{\mathbf{C}}(1)} \cdots c_{n-m,p_{\mathbf{C}}(n-m)}$$

$$= \sum_{p_{\mathbf{A}} \in S_m} \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot a_{1,p_{\mathbf{A}}(1)} \cdots a_{m,p_{\mathbf{A}}(m)} \times$$

$$\sum_{p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}} \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}} \cdot c_{1,p_{\mathbf{C}}(1)} \cdots c_{n-m,p_{\mathbf{C}}(n-m)}$$

$$= \det \mathbf{A} \, \det \mathbf{C}$$

5. a) `mydet.m`.

```
function d = mydet(A)

n = size(A,1);

% Rekursion endet bei 1x1 Matrix
if n == 1
    d = A;
    return
end

% Spalte und Zeile mit am meisten Nullen
[nz_col, best_col] = max(sum(A == 0, 1));
[nz_row, best_row] = max(sum(A == 0, 2));

% Falls mehr Nullen in einer Zeile, transponiere
if nz_col >= nz_row
    k = best_col;
else
    k = best_row;
    A = A';
```

Bitte wenden!

```
end

% Entwicklung nach k-ter Spalte
c = zeros(1,n);
% Indizes der benoetigten Kofaktoren
indices = find(A(:,k))';
for i = indices
    Ai = A([1:(i-1) (i+1):end], [1:(k-1) (k+1):end]);
    c(i) = (-1)^(i+k) * mydet(Ai);
end
d = c*A(:,k);
```

b) `runmydet.m`.

```
close all
clear all

A = rand(10, 10);
tic;
mydet(A)
toc
```

```
 ans =
   -0.0060
Elapsed time is 230.572734 seconds.
```

c) Nennen wir die Anzahl Fuktionsaufrufe bei einer $n \times n$ Matrix f_n. Offensichtlich ist $f_1 = 1$. Schlimmstenfalls (wenn $\boldsymbol{A}$ keine Nullen enthält), ruft mydet sich selbst, zusätzlich zum laufenden Aufruf, n mal auf mit einer Matrix der Grösse $(n-1) \times (n-1)$. Es gilt also $f_n \leq 1 + nf_{n-1}$.

Die Fakultät ist definiert als $f_n = nf_{n-1}$. Maximal werden, wenn $\boldsymbol{A}$ keine Nullen enthält, $f_n = 1 + nf_{n-1}$ Funktionsaufrufe gemacht, mehr als die Fakultät von n. In dem Fall ist der Algorithmus sehr ineffizient, verglichen mit $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenoperationen für den Gauß-Algorithmus).

6. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche der folgenden Lösungen ist richtig?

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-i & i^2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & i & b \\ i-2 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -i & -a & 0 & -i \\ 1 & -b & -1 & -i^3 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

(a) i

(b) i^2

√ (c) 0

(d) $a \cdot b$

(e) $a \cdot b \cdot i$

Schiefsymmetrische Matrix mit ungerader Dimension.

2. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $a_{ij} = ij$ und $n > 1$.
Welche Aussage ist richtig?

√ (a) $\det \mathbf{A} = 0$

(b) $\det \mathbf{A} = 1$

(c) $\det \mathbf{A} = -1^n$

(d) $\det \mathbf{A} = -2^n$

Die Matrix $\mathbf{A}$ sieht folgendermassen aus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Die Zeilen 2 bis n sind Vielfache der Zeile 1 und damit linear abhängig. Die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen ist Null.