D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Serie 11

1. **a)** Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

indem Sie wiederholt nach einer geeigneten Zeile entwickeln.

d) Wir wissen, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix einfach zu berechnen ist. Zudem ändert sich die Determinante nicht, wenn ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird. Dies erlaubt die effiziente Bestimmung der Determinante einer beliebigen Matrix mittels Gauss-Elimination oder LR-Zerlegung.
Bestimmen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$ indem Sie Gauss-Elimination von Hand machen.

2. Wir definieren die vom Parameter λ abhängige Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \mathbf{I}$$

Wir wissen, dass eine Matrix genau dann singulär ist, wenn ihre Determinante gleich Null ist. Für welche Werte λ wird die Matrix $\mathbf{A}(\lambda)$ singulär?

3. Determinanten **(Korrektur durch Assistenten)**: Wir definieren die zwei Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

b) Für eine schiefsymmetrischen Matrix gilt: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

Gibt es eine allgemeine Aussage, die für die Determinante von schiefsymmetrischen Matrizen zutrifft? Falls ja, formulieren Sie diese und versuchen Sie mit Hilfe dieser, die Determinante folgender zwei Matrizen zu berechnen:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 1 \\ -a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix},$$

4. Gegeben ist eine 2x2 Blockmatrix:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$,$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$ und $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m \times m}$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{C}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Determinante einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p \in S_m} \operatorname{sign}(p) a_{1,p(1)} a_{2,p(2)}, \ldots, a_{m,p(m)}$$

5. MATLAB-Aufgabe: Determinantenberechnung:

a) Rekursive Determinantenberechnung: Die Berechnung der Determinanten einer $n \times n$ Matrix mittels Entwicklung nach Zeile oder Spalte führt zu einer rekursiven Formel der Determinanten als Funktion von Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen, wobei die Rekursion bei der Matrixgrösse 1×1 abgebrochen wird, da eine solche Determinante trivial gegeben ist. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function d = mydet(A)` um die Determinante rekursiv zu berechnen.

b) Wie viele rekursive Funktionsaufrufe sind nötig, um die Determinante einer $n \times n$ Matrix zu berechnen?

6. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

Siehe nächstes Blatt!

1. Welche der folgenden Lösungen ist richtig?

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-i & i^2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & i & b \\ i-2 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -i & -a & 0 & -i \\ 1 & -b & -1 & -i^3 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

(a) i

(b) i^2

(c) 0

(d) $a \cdot b$

(e) $a \cdot b \cdot i$

2. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $a_{ij} = ij$ und $n > 1$.
Welche Aussage ist richtig?

(a) $\det \mathbf{A} = 0$

(b) $\det \mathbf{A} = 1$

(c) $\det \mathbf{A} = -1^n$

(d) $\det \mathbf{A} = -2^n$

Abgabe: Do/Fr 15./16. Dezember 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`