D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 12

1. a)

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 2$: Der Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ zum Eigenwert λ_1 erfüllt $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, darum ist es eine (nicht-triviale) Lösung von $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0$. Wir berechnen also eine Basis von $\ker(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit hat $\mathbf{A}$ die Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen mit Matlab nach

```
>> [V, D] = eig(A)

V =
    0.5547   -0.4472
   -0.8321    0.8944


D =
     2     0
     0     1
```

Die Eigenvektoren sind hier normiert. Um dieselben Ergebnisse wie oben zu erhalten, multiplizieren wir die Eigenvektoren jeweils mit einem geeigneten Faktor

```
>> V = V*diag([-2/V(1,1) -1/V(1,2)])

V =
   -2.0000   -1.0000
    3.0000    2.0000
```

b)

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)^2 + 1$$
$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^2 = -1 \iff 2-\lambda = \pm i \iff \lambda = 2 \mp i$$

$\lambda_1 = 2 + i$:

$$\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2 - i$:

$$\mathbf{B} - \lambda_2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat $\mathbf{B}$ die Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{\Lambda_B} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V_B} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matlab liefert für die Matrix $\mathbf{B}$

```
>> [V, D] = eig(B)

V =
   0.7071                  0.7071
        0 + 0.7071i             0 - 0.7071i

D =
   2.0000 + 1.0000i             0
        0                  2.0000 - 1.0000i

>> V = V*diag(1./V(2,:))

V =
        0 - 1.0000i             0 + 1.0000i
   1.0000                  1.0000
```

c)

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) = -(1-\lambda)^2\lambda$$

$\lambda_1 = 1$:

$$\mathbf{C} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{C} - \lambda_2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathbf{C}$ nicht diagonalisierbar, weil λ_1 hat algebraische Vielfachheit 2 aber geometrische Vielfachheit nur 1. Matlab liefert für die Matrix $\mathbf{C}$

```
>> [V, D] = eig(C)

V =
          0    0.0000         0
          0         0    1.0000
     1.0000   -1.0000         0


D =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
```

Man bemerke, dass die beiden ersten Spalten von $\mathbf{V}$ linear abhängig sind (abgesehen von Rundungsfehlern), d.h. $\mathbf{V}$ stellt keine gültige Eigenbasis dar. Weiter stellt man fest, dass $\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ wirklich nicht $\mathbf{C}$ ergibt.

```
>> V*D*inv(V)
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 5.551115e-017.

ans =
     1     0     0
     0     0     0
     0     0     1
```

2. a) Für den ersten Ausschank erhalten wir

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1/7 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren $\mathbf{T}^{(i)}$ sind ähnlich: Wobei die Kolonne mit $1/7$ sich in der i-ten statt ersten Spalte befindet.

b)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^T \overset{8.3}{=} \det((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Bitte wenden!

Da sich das charakteristische Polynom für $\mathbf{A}^T$ nicht verändert, haben wir die selben Eigenwerte wie für $\mathbf{A}$.

c) Mit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1111111\end{pmatrix}^T$, gilt für alle $i = 1, ..., 7$ ${\mathbf{T}^{(i)}}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Damit gilt auch $\mathbf{A}^T\mathbf{v} = {\mathbf{T}^{(1)}}^T \cdots {\mathbf{T}^{(7)}}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Insbesondere ist 1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}^T$ und somit auch von $\mathbf{A}$.

d)
```
A = eye(7);
for i = 1:7
    Ti = eye(7);
    Ti(:,i) = 1/7 * ones(7,1);
    A = Ti*A;
end

A =
  0.31831      0.27852      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.17546      0.27852      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.15505      0.13567      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.13172      0.11526      0.10085      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.10507     0.091934     0.080443     0.070387      0.18659      0.16327      0.14286
 0.074604     0.065279     0.057119     0.049979     0.043732      0.16327      0.14286
 0.039789     0.034815     0.030463     0.026656     0.023324     0.020408      0.14286

x = null(A-eye(7))
x =

     -0.59161
     -0.50709
     -0.42258
     -0.33806
     -0.25355
     -0.16903
    -0.084515

x = 3/sum(x) * x
x =
         0.75
      0.64286
      0.53571
      0.42857
      0.32143
      0.21429
      0.10714
```

3. **a)** Das kommutative Diagramm ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{A}^k"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] & \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{E}^n \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] \\
 & & \cdots & \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{\Lambda}^k"'] \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"] & \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"] & \cdots \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] & \mathbb{E}^n \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"]
\end{tikzcd}$$

Die Formel für $\mathbf{A}^k$ kann einfach abgelesen werden und ist

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

Dieselbe Formel erhält man auch durch direktes Einsetzen der Spektralzerlegung $\mathbf{A}^k = (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}$, da $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$ jeweils wegfällt.

b) Aus Teilaufgabe a) ist direkt ersichtlich, dass

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_{k-1} = \mathbf{A}^k\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}_0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}_k = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_k}{\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|}.$$

Der Startvektor $\mathbf{a}_0$ kann als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i.$$

So erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}^k\sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{A}^k\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i^k\mathbf{v}_i$$

wobei wir genutzt haben, dass $\mathbf{v}_i$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}$ zum Eigenwert λ_i^k ist. Jetzt klammern wir den dominierenden Eigenwert λ_1 aus

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \lambda_1^k\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_i = \lambda_1^k\left(b_1\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i\ell_i^k\mathbf{v}_i\right)$$

Für $i \geq 2$ haben wir $\ell_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}$ gesetzt und da $|\lambda_i| < |\lambda_1|$, gilt $|\ell_i| < 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \ell_i^k = 0$. D.h. für $k \to \infty$ ist der unnormierte Vektor $\tilde{\mathbf{a}}_k = \lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1$ und der normierte Vektor wird zu

$$\mathbf{a}_k = \frac{\lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1}{\|\lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1\|} = \frac{\lambda_1^k b_1}{|\lambda_1^k b_1|}\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = c\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

wobei c eine möglicherweise komplexe Zahl mit Betrag $|c| = 1$ ist.

Die Folge $\mathbf{a}_k$ liefert also im Limit $k \to \infty$ einen normierten Eigenvektor zum dominierenden Eigenwert λ_1. Wir erkennen ebenfalls, dass das Verfahren nicht funktioniert, wenn die Koordinate b_1 gleich Null ist. Für einen zufällig gewählten Startvektor $\mathbf{a}_0$ ist das aber sehr unwahrscheinlich.

4. Online-Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche Art lineare Abbildung ist durch Matrizen mit Eigenwerten λ und Eigenvektoren v beschrieben?

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit Normale $(2, 1)$

(b) Scherung in x-Richtung mit Faktor 2

√ (c) Projektion auf die Ursprungsgerade mit Normale $(1, -2)$

Durch den Eigenwert 1 wird ein Vektor parallel zu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$ nicht verändert und durch den Eigenwert 0 ein Vektor orthogonal dazu auf **0** abgebildet.

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Skalierung mit Faktor 2

√ (e) Projektion auf die x-Achse und Skalierung mit Faktor 2

(f) Spiegelung an der Achse $x = 2$

Durch den Eigenwert 2 wird skaliert und durch den Eigenwert 0 projiziert.

2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ($\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$). Ausserdem seien $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\mathbf{A}^2$ hat mindestens einen Eigenwert mit strikt positivem Imaginärteil.

Nach Satz 9.15 haben symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte, und es ist einfach zu sehen, dass $\mathbf{A}^2$ symmetrisch ist.

$\surd$ (b) Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

Da $\mathbf{A}$ positiv definit ist, gilt $0 < \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v}$ für alle Spaltenvektoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Seien nun wie in Satz 9.15 $\mathbf{U}$ die Diagonalisierungsmatrix, $\mathbf{\Lambda} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ und sei $\mathbf{e}_j$ ein Einheitsvektor. Wir setzen $\mathbf{v} := \mathbf{U}\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$ und sehen ein, dass $0 < \mathbf{e}_j^\top \underbrace{\mathbf{U}^\top \mathbf{A} \mathbf{U}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{e}_j = \lambda_j$. Hier verwenden wir, dass für eine Matrix $\mathbf{B}$ der Diagonaleintrag b_{jj} genau dem Wert $\mathbf{e}_j^\top \mathbf{B} \mathbf{e}_j$ entspricht.

(c) $\mathbf{A}$ hat mindestens einen Eigenwert, dessen geometrische Vielfachheit strikt kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.

Nach Satz 9.15 ist A diagonalisierbar und nach Satz 9.14 müssen somit die Vielfachheiten übereinstimmen.

(d) Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$ falls $i \neq j$.

$\mathbf{A}$ symmetrisch und positiv definit impliziert nicht, dass die Eigenwerte paarweise verschieden sind. Das einfachste Beispiel ist die Identitätsmatrix.

$\surd$ (e) Es gibt eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} \geq \alpha\, \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Da die Eigenvektoren eine orthogonale Basis bilden, können wir schreiben $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_j$ für Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j a_i \mathbf{v}_j^\top \mathbf{A} \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i a_j a_i \underbrace{\mathbf{v}_j^\top \mathbf{v}_i}_{=0 \text{ if } j \neq i} \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_i a_j^2 \mathbf{v}_j^\top \mathbf{v}_j \\
&\geq \underbrace{\min_j(\lambda_j)}_{=:\alpha>0} \sum_j \sum_i (a_j \mathbf{v}_j)^\top (a_i \mathbf{v}_i) \\
&= \alpha \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \,.
\end{aligned}
$$