Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Serie 12

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Geben Sie, falls möglich, jeweils eine Matrix $\mathbf{V}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ an so dass $\mathbf{V\Lambda V}^{-1}$ wieder die ürsprüngliche Matrix ergibt. Führen Sie die Rechnungen von Hand aus und prüfen Sie sie mit MATLAB nach. Verwenden Sie dazu den MATLAB-Befehl *eig()*.

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Um einen Tisch sitzen 7 Zwerge. Vor jedem steht ein Becher. Einige der Becher enthalten Milch, insgesamt 3 Liter. Einer der Zwerge verteilt seine Milch gleichmässig auf alle Becher (inklusive seinem eigenen, sprich $1/7$ pro Becher). Danach tut sein rechter Nachbar dasselbe. Genauso verfährt der nächste rechts herum u.s.w. Nachdem der 7. Zwerg seine Milch gleichmässig auf die anderen Becher verteilt hat, ist in jedem Becher wieder soviel Milch wie am Anfang. Wie viel Milch war anfangs in jedem Becher?

Seien

$$x_1^{(0)}, ..., x_7^{(0)} \qquad \text{die Milchmengen am Anfang}$$

und

$$x_1^{(1)}, ..., x_7^{(1)} \qquad \text{nach dem ersten Ausschank.}$$

Dann kann der erste Ausschank als lineare Abbildung dargestellt werden:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}.$$

Bitte wenden!

Allgemein wird der i-te Ausschank durch die Transformation

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)}\mathbf{x}^{(i-1)},$$

beschrieben.
Für den Endzustand haben wird

$$\mathbf{x}^{(7)} = \mathbf{T}^{(7)}\mathbf{T}^{(6)}...\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}$$

und da $\mathbf{x}^{(7)} = \mathbf{x}^{(0)}$ ist, erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

a) Überlegen Sie sich als Erstes wie die Matrix $\mathbf{T}^{(i)}$ aussieht?

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ gleich den Eigenwerten ihrer Transponierten $\mathbf{A}^T$ sind. Benutzen Sie dazu Satz 8.9 aus dem Skript.

c) Mit Hilfe von **b)**, zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}$ wirklich einen Eigenwert $\lambda = 1$ hat. Hinweis: betrachten Sie $\mathbf{A}^T$ und erraten Sie einen Eigenvektor für die einzelnen Matrizen ${\mathbf{T}^{(i)}}^T$.

d) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mittels MATLAB und berechnen Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$. Verwenden Sie dazu den MATLAB-Befehl *null()*, welcher Ihnen eine orthogonale Basis für den Kern einer Matrix berechnet.

e) Skalieren Sie den berechneten Eigenvektor so, dass die Bedingung der gesamten Milchmenge von 3 Litern $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 3$ berücksichtigt wird.

3. Sei $\mathbf{A}$ eine diagonalisierbare Matrix und dessen Eigenwertzerlegung gegeben durch $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$.

a) Zeichnen Sie ein kommutatives Diagramm (analog zur Abbildung 5.48 im Skript) für die Abbildungsmatrix

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}$$

welches insbesondere diese Abbildung in der Eigenbasis darstellt.

Drücken Sie $\mathbf{A}^k$ als Funktion der Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ und der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ aus, wobei $\mathbf{\Lambda}$ aus den Eigenwerten λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ besteht.

b) Nehmen wir an, dass es einen dominierenden Eigenwert λ_1 gibt (d.h. $\forall i \neq 1 : |\lambda_1| > |\lambda_i|$). Gegeben sei ein zufälliger Vektor $\mathbf{a}_0$ und die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1}}{\|\mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1}\|}.$$

Iteriert man diese Vorschrift genügend lange, so entspricht $\mathbf{a}_k$ einem zum dominanten Eigenwert zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_1$. Zeigen Sie, warum dies der Fall ist. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

Siehe nächstes Blatt!

1. Formulieren Sie zuerst den unnormierten Vektor der k-ten Iteration $\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ in Abhängigkeit von $\tilde{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{a}_0$ und $\mathbf{A}$.
2. Drücken Sie danach den Startvektor $\mathbf{a}_0$ in der Eigenbasis aus, d.h. wir setzen $\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 b_1 + \mathbf{v}_2 b_2 + \cdots + \mathbf{v}_n b_n$.
3. Leiten Sie eine Formel für $\tilde{\mathbf{a}}_k$ in Abhängigeit der Eigenwerte her.
   Tipp: Starten Sie zuerst mit $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0$ und $\tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_1$ und schliessen Sie dann auf beliebige k.
4. Klammern Sie den dominanten Eigenwert aus und untersuchen Sie, was für $k \to \infty$ passiert.

Die verbleibenden Schritte sollten dann direkt aus dem gegebenen Ansatz folgen.

(Anmerkung: Das hier beschriebene Verfahren funktioniert nicht, wenn der Startvektor $\mathbf{a}_0$ orthogonal zum Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ ist. Da $\mathbf{a}_0$ zufällig gewählt wird, sind diese Vektoren mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht-orthogonal. Sie können annehmen, dass das der Fall ist.)

4. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Welche Art lineare Abbildung ist durch Matrizen mit Eigenwerten λ und Eigenvektoren v beschrieben?

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit Normale $(2, 1)$

(b) Scherung in x-Richtung mit Faktor 2

(c) Projektion auf die Ursprungsgerade mit Normale $(1, -2)$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Skalierung mit Faktor 2

(e) Projektion auf die x-Achse und Skalierung mit Faktor 2

(f) Spiegelung an der Achse $x = 2$

2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$). Ausserdem seien $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\mathbf{A}^2$ hat mindestens einen Eigenwert mit strikt positivem Imaginärteil.

(b) Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \dots, m$.

(c) $\mathbf{A}$ hat mindestens einen Eigenwert, dessen geometrische Vielfachheit strikt kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.

(d) Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$ falls $i \neq j$.

(e) Es gibt eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass $\mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v} \geq \alpha\, \mathbf{v}^\top\mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe: Do/Fr 22./23. Dezember 2016

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`