# Musterlösung 13

**1.** **a)** Wir berechnen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms erkennt man leicht, dass man das Monom $(2-\lambda)$ abspalten kann:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2-1) = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

Vom ersten Faktor lesen wir $\lambda_1 = 2$ ab, für dern zweiten Faktor rechnen wir mit Hilfe des Diskriminanten $\lambda_{2,3} = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}$, also $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$.

Der Eigenwert $\lambda_{1,2} = 2$ hat demnach algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert $\lambda_3 = 4$ hat Vielfachheit 1.

**b)** Wir müssen nun orthonormale Basen der Eigenräume finden.

- $\lambda_{1,2} = 2$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat 2 freie Parameter, also ist die geometrische Vielfachheit auch 2. Da wir eine orthornomale Basis suchen, müssen wir noch normieren ($\tilde{\mathbf{v}}_1$ und $\tilde{\mathbf{v}}_2$ sind schon orthogonal)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 4$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ die Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**c)** $\mathbf{\Sigma}$ hat die gleichen Dimensionen wie $\mathbf{A}$, ausserdem sind die Singulärwerte von $\mathbf{A}$ gerade die Wurzel aus den Eigenwerten von $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, also haben wir

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie im Skript berechnen wir

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{A}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schliesslich müssen wir $\mathbf{U}_r$ noch zu einer orthogonalen Matrix ergänzen. Die Wahl $\mathbf{u}_4 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ hat offensichtlich Norm 1 und ist othogonal zu den drei anderen Spalten. Also ist

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix}$$

**2.** **a)**

```
function e = compErr(alpha)

A = [1 0; -1 alpha];
x = [1; 0];
b = A*x;

b_err = b + eps;
x_err = A\b_err;

e = norm(x_err-x);
```

**b)**

```
e = comErr(1E-6)
e = 4.4409e-010
e = e/eps
ans = 2.0000e+006
```

Der Fehler in der rechten Seite $b\mathbf{b}$ hat also einen Fehler in der Lösung $\mathbf{x}$ verursacht, der 2 Millionen(!) mal grösser ist.

**Siehe nächstes Blatt!**

**c)** Der Funktionskopf verändert sich zu

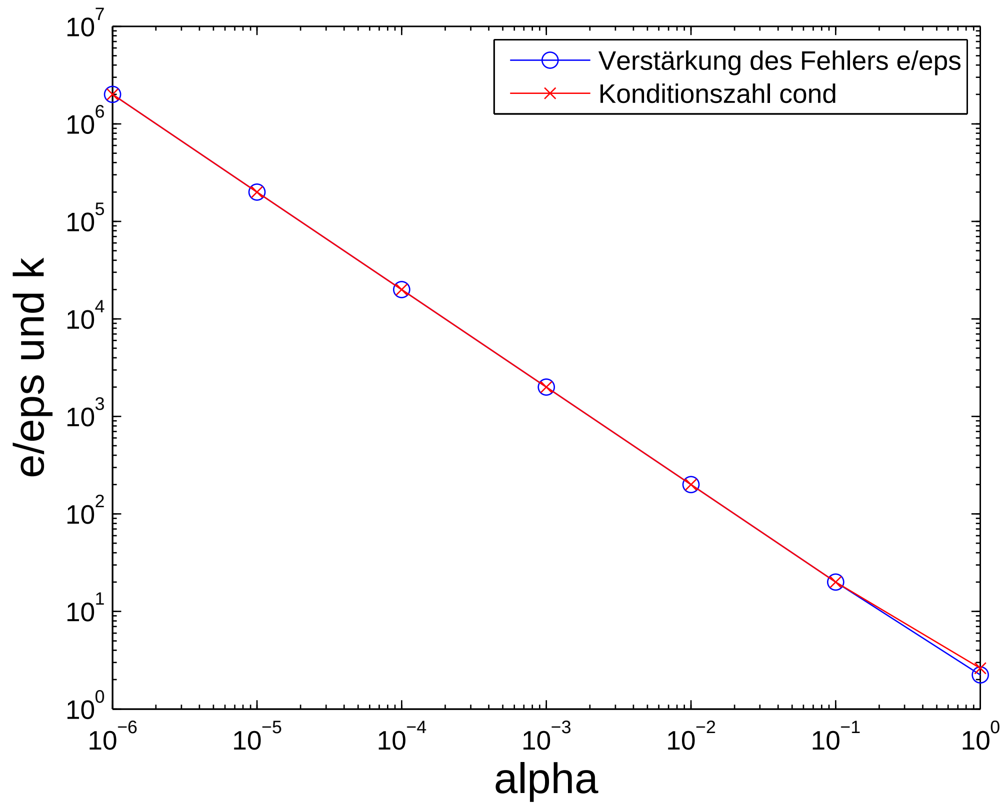
```
function [e, k] = compErr(alpha)
```

und am Ende der Funktion wird noch die Zeile

```
k = cond(A);
```

hinzugefügt.

**d)**



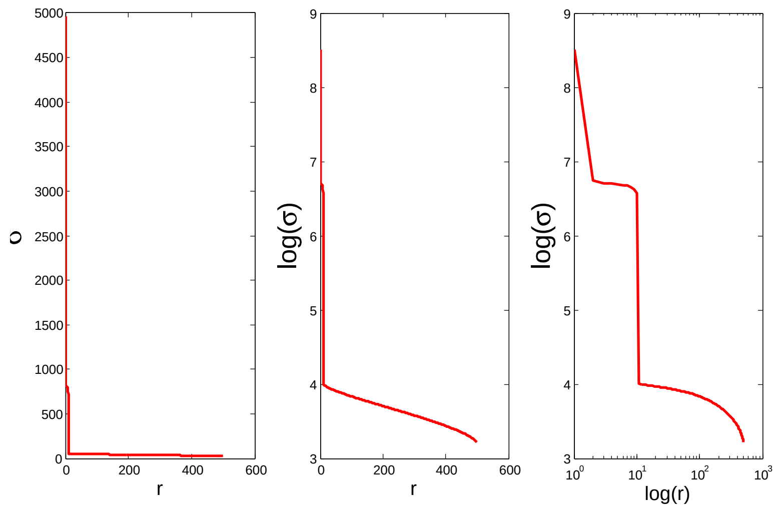

Wir beobachten, dass der Fehler mit kleiner werdendem $\alpha$ zunimmt.

Laut Theorie ist die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ eine obere Schranke für $\frac{e}{\texttt{eps}}$. Wir stellen fest, dass in diesem Beispiel diese Schranke ziemlich genau ist.

**3.** **a)** Die Datenmatrix $\mathbf{D}$ kann mittels Singulärwertzerlegung $\mathbf{D} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ in Matrizen zerlegt werden, die direkt Auskunft über die vier fundamentalen Unterräume geben. Wie in der Aufgabenstellung erwähnt, sind wir aber lediglich am Spaltenraum und an den Singulärwerten interessiert. Dies lässt sich durch Eigenwertzerlegung von $\mathbf{DD}^T = \mathbf{U\Sigma V}^T\mathbf{V\Sigma U}^T = \mathbf{U\Sigma}^2\mathbf{U}^T$ berechnen. Im gegebenen Fall ist dies einiges effizienter, da $\mathbf{DD}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ wobei $m \ll n$.

Werden die Singulärwerte absteigend geordnet und geplottet so erhält man:

**Bitte wenden!**




Die Plots zeigen, dass eine Rang-10 Matrixapproximation eine gute Datenapproximation liefert. Folgender Matlabcode berechnet die gesuchte Approximation des Spaltenraums $\hat{\mathbf{U}}$.

**b)** Wir lösen das Least-Squares Problem, wobei wir lediglich diejenigen Gleichungen `rated` berücksichtigen, welche den vom Kunden bewerteten Filmen $\mathbf{d}_{rated}$ entsprechen.

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}} \|\hat{\mathbf{U}}_{\texttt{rated},:}\mathbf{x} - \mathbf{d}_{\texttt{rated}}\|^2$$

Mittels QR-Zerlegung kann dieses Problem rasch in Matlab gelöst werden:

```
%--------------------------------------------------------------------------
% Assignment b)
%--------------------------------------------------------------------------
rated = ~isnan(d);

% x = arg min || Ur(rated,:) * x - d(rated,:) ||
[Q, R] = qr(Ur(rated,:), 0);
% Q*R*x = d(rated)
x = R \ Q' * d(rated);
% L2-norm of residuum:
fprintf('L2-norm of residuum: %d\n', norm(Ur(rated,:)*x - d(rated)));
```

Das Residuum ist dann gegeben durch $\mathbf{r} = \mathbf{d}_{\texttt{rated}} - \hat{\mathbf{U}}_{\texttt{rated},:}\mathbf{x}^*$ mit $\|\mathbf{r}\| \approx 0.99893$.

**c)** Wir verwenden nun wieder den gesamten Spaltenraum, d.h. wir berücksichtigen alle Zeilen der Matrix $\hat{\mathbf{U}}$. Eine auf den Kunden zugeschnittene Schätzung für die Bewertungen aller Filme ist somit gegeben durch

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{x}^*.$$

Die geschätzten Bewertungen der vom Kunden noch nicht gesehenen Filme können sortiert werden um dem Kunden einige Vorschläge zu machen.

```
%--------------------------------------------------------------------------
% Assignment c)
%--------------------------------------------------------------------------
```

**Siehe nächstes Blatt!**

```
% Estimated preferences
d_hat = Ur*x;
% Sort according to estimated score
[best_score, best_id] = sort(d_hat, 'descend');
% Recommend only movies that have not been rated yet
recom = best_id(~rated(best_id));
% Display Top 10 recommendations along with their estimated score
disp([recom(1:10), d_hat(recom(1:10))]);
```

Dieser Algorithmus funktioniert, weil die Filmbewertungen eines Kunden redundant sind. In der ersten Teilaufgabe haben wir gesehen, dass die Filmbewertungen (abgesehen von kleineren Schwankungen) aller Kunden eigentlich aus einem 10-dimensionalen Unterraum stammen. Hat ein neuer Kunde also mindestens 10 'linear unabhängige Filme' bewertet, so ist es möglich, aus diesen Bewertungen auf die verbleibenden Filmbewertungen zu schliessen.

**4.** Online-Multiple-Choice-Aufgaben Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$ und dessen Singulärwertzerlegung
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{pmatrix} \mathbf{\Sigma} \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4\end{pmatrix}^T$ mit

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**1.** Was ist der Rang von $\mathbf{A}$?

(a) 0

(b) 1

√ (c) 2

(d) 3

(e) 4

(f) $\infty$

Der Rang ist gleich der Anzahl Singulärwerte ungleich Null.

**Bitte wenden!**

**2.** Was ist eine Basis vom Bild von $\mathbf{A}$?

√ (a) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$

(b) $\{\mathbf{u}_3\}$

(c) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

(d) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

(e) $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

(f) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

(g) $\{\mathbf{v}_4\}$

(h) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Das Bild wird von den $\mathbf{u}_i$s aufgespannt, die den Singulärwerten *ungleich* Null entsprechen.