D-INFK
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2016

Serie 13

1. In dieser Aufgabe wollen wir die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

von Hand berechnen. Wir werden wie in Kapitel 11.1 vorgehen. Der erste Schritt ist die Eigenwertzerlegung von $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ oder $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Wir wählen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, da dies die kleinere Matrix ergibt.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, inklusive algebraischer Vielfachheit, von $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.
Hinweis: Einer der Eigenwerte ist 2.

b) Da $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ symmetrisch ist, gibt es eine Zerlegung $\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ mit *orthogonalem* $\mathbf{V}$. Finden Sie eine solche Zerlegung.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{\Sigma}$ und $\mathbf{U}$ so dass $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$.

2. MATLAB-Aufgabe **Konditionszahl**

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, wie die Konditionszahl sich auf die Stabilität der Lösung eines linearen Gleichungssystems auswirkt. Wir definieren

$$\mathbf{A}(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man bemerke, dass $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ nicht invertierbar ist (das sieht man beispielsweise an den linear abhängigen Zeilen). Für $\alpha \neq 0$ ist $\mathbf{A}(\alpha)$ zwar invertierbar, aber wir werden sehen, dass für kleine α es trotzdem zu Schwierigkeiten kommen kann.

Im Folgenden werden wir die Maschinengenauigkeit `eps` benutzen.

a) Schreiben sie eine MATLAB-Funktion `function e = compErr(alpha)`. Diese Funktion soll zuerst $\mathbf{A}$ und $\mathbf{x}$ wie oben definiert generieren und dann $\mathbf{b}$ berechnen. Danach soll mit $\mathbf{b_{err}} = \mathbf{b} + \texttt{eps}$ eine fehlerbehaftete rechte Seite generiert werde. Der Fehler, den wir so künstlich einführen, ist ungefähr so gross wie man es realistischerweise erwarten kann. Schliesslich soll die Funktion das fehlerbehaftete Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x_{err}} = \mathbf{b_{err}}$ lösen und den Fehler $e := ||\mathbf{x_{err}} - \mathbf{x}||$ zurückgeben.

Bitte wenden!

b) Berechnen Sie den Fehler e für $\alpha = 10^{-6}$. Dieser Fehler mag unwesentlich scheinen, deshalb berechnen Sie $\frac{e}{\texttt{eps}}$. Diese Zahl gibt an, um wieviel der ursprüngliche Fehler `eps` "verstärkt" wurde.

c) Erweitern Sie die Funktion jetzt so, dass auch die 2-Norm-Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ berechnet wird: `function [e, k] = compErr(alpha)`.
Hinweis: Funktion `cond`.

d) Werten Sie die Funktion für $\alpha \in \{10^0, 10^{-1}, \ldots, 10^{-6}\}$ aus und stellen Sie die Verstärkung des Fehlers $\frac{e}{\texttt{eps}}$ und die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ in einem gemeinsamen Plot dar. Zur besseren Lesbarkeit verwenden Sie eine logarithmische Skala auf beiden Axen. Was ist der Zusammenhang zwischen den beiden Grössen?
Hinweis: Funktion `loglog`.

3. MATLAB-Aufgabe **Film-Vorschläge**

Ein Onlinevideoverleih sammelte über einen längeren Zeitraum Filmbewertungen seiner Kunden. Ein Kunde kann einen Film mit einer Note von 1 bis 6 bewerten. Die Daten wurden vom Filmverleih in einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{D}$ zusammengefasst, wobei m der Anzahl der Filme und n der Anzahl der Kunden entspricht, welche an der Umfrage teilgenommen haben. Wir nehmen an, dass diese Kunden alle Filme bewertet haben. Diese Daten sind auf der Übungshomepage verfügbar.

Ihre Firma wurde nun vom Videoverleih beauftragt ein System zu entwickeln, das einem Kunden, der nur einen Bruchteil der Filme gesehen und bewertet hat, Vorschläge für Filme unterbreitet, die er zwar noch nicht gesehen hat, aber basierend auf seinen Bewertung wahrscheinlich gut finden wird. Sie vermuten, dass mittels Methoden aus der Linearen Algebra bereits ein vernünftiger Prototyp erstellt werden kann.

Die Daten, welche Sie für diese Aufgabe benötigen finden Sie auf der Übungshomepage als Anhang zur Serie. Um `.mat`-Dateien zu importieren benutzen Sie den Befehl `load FILE.mat`, siehe `help load`. Die in der `.mat` gespeicherten Variablen werden mitsamt Variablennamen abgespeichert - beachten Sie den Verlauf Ihres MATLAB-Workspace.

a) Zerlegen Sie die Datenmatrix $\mathbf{D}$ und plotten Sie die Singulärwerte dieser Matrix. Welchen Rang r schlagen Sie vor, um die Datenmatrix zu approximieren? Berechnen Sie zudem den zugehörigen r-dimensionalen Spaltenraum $\hat{\mathbf{U}}$.

Bemerkung: Die Singulärwertzerlegung liefert zwar den benötigten Spaltenraum, die Singulärwerte und auch den Zeilenraum. Im weiteren Verlauf dieser Aufgabe werden aber lediglich der Spaltenraum $\hat{\mathbf{U}}$ und die Singulärwerte benötigt. Dies kann im gegebenen Fall effizienter ohne Singulärwertzerlegung berechnet werden.

b) Gegeben sei ein Kunde, welcher einige Filme bewertet hat und nun neue Filmvorschläge haben möchte. Laden Sie von der Übungshomepage die Bewertungen $\mathbf{d}$ dieses Kunden herunter. Vom Kunden noch nicht gesehene und somit unbewertete Filme sind in diesem Datenvektor mit `NaN` bezeichnet. Die Indices der bewerteten Filme können also mittels `rated = ~isnan(d)` gefunden werden.

Siehe nächstes Blatt!

Bestimmen Sie die Koordinaten $\mathbf{x}$ im r-dimensionalen Spaltenraum $\hat{\mathbf{U}}$ basierend auf den vom Kunden bewerteten Filmen. Lösen Sie das resultierende überbestimmte Gleichungssystem im Sinne der kleinsten Quadrate.

c) Wie kann der in der vorherigen Teilaufgabe bestimmte Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ verwendet werden, um dem Kunden neue Filmvorschläge zu unterbreiten?

Für Interessierte steht auf der Übungshomepage im Anhang ebenfalls ein Artikel der New York Times bereit (vor allem Mitte Seite 5 beachten).

4. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$ und dessen Singulärwertzerlegung
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{pmatrix} \mathbf{\Sigma} \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4\end{pmatrix}^T$ mit

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Was ist der Rang von $\mathbf{A}$?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

(f) ∞

2. Was ist eine Basis vom Bild von $\mathbf{A}$?

(a) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$

(b) $\{\mathbf{u}_3\}$

(c) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

(d) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

(e) $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

(f) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

(g) $\{\mathbf{v}_4\}$

(h) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Bei dieser Serie gibt es keine Abgabe. Die Musterlösung wird am 29.12.16 publiziert. Die Online-Multiple-Choice-Aufgaben können bis 29.12.16, 12:00 gelöst werden.

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2016/`