D-INFK Lineare Algebra HS 2018
Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung Serie 1

1. Polar-, kartesische Form von komplexen Zahlen

a)

$$u = 1 + i - 2i^2 = 1 + 3i$$

$$\begin{aligned}
u + v + w &= (1 + 3i) + (2 - i) + (1 + 4i) = (1 + 2 + 1) + (3 - 1 + 4)i = 4 + 6i \\
u \cdot v &= (1 + 3i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 6i - 3i^2 = 5 + 5i \\
v \cdot w \cdot i &= (2 - i) \cdot (1 + 4i) \cdot i = (2 + 8i - i - 4i^2) \cdot i = (6 + 7i) \cdot i = -7 + 6i \\
\frac{w}{v} &= \frac{w}{v} \cdot \frac{\overline{v}}{\overline{v}} = \frac{(1 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 8i + 4i^2}{4 - 2i + 2i - i^2} = \frac{-2 + 9i}{5} - \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i \\
\frac{v}{u} &= \frac{v}{u} \cdot \frac{\overline{u}}{\overline{u}} = \frac{(2 - i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{2 - 6i - i + 3i^2}{1 + 9} = \frac{-1 - 7i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i \\
|v| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

b) Um die Polarform $re^{i\theta}$ einer komplexen Zahl zu finden, rechnet man zuerst deren Betrag r aus. Dieser kann dann ausgeklammert werden und der dazu gehörende Winkel θ mit Hilfe von Trigonometrie auf dem Einheitskreis bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
2 &= 2(1 + 0i) = 2(\cos 0 + \sin 0i) = 2e^{i0} \\
-i &= 1(0 - i) = \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \\
3 - 3\sqrt{3}i &= 6(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 6(\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}i) = 6e^{i\frac{5\pi}{3}}
\end{aligned}$$

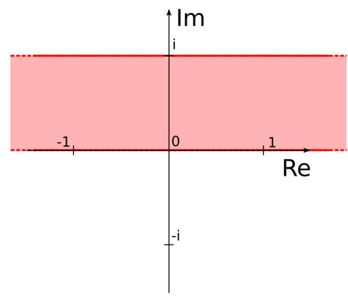
c)

$$\begin{aligned}
-2e^{i\frac{\pi}{4}} &= -2(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i) = -2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\
4e^{i\frac{2\pi}{3}} &= 4(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i) = 4(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2 + 2\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

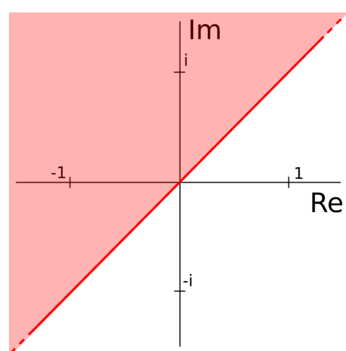
Bitte wenden!

2. Komplexe Mengen

a) $z = x + iy \Rightarrow \mathsf{Re}\,(i\bar{z}) = \mathsf{Re}\,(ix + y) = y$
$0 < \mathsf{Re}\,(i\bar{z}) < 1 \Leftrightarrow 0 < y < 1$
B ist der Streifen aller Punkte zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = 1$, ohne die beiden Geraden.

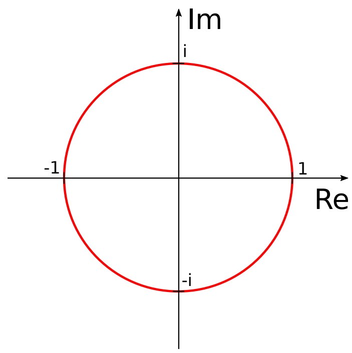


b) $|z - i| < |z - 1|$
$\Leftrightarrow |z - i|^2 < |z - 1|^2$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 < (x - 1)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 < x^2 - 2x + 1 + y^2$
$y > x$
A ist die Fläche oberhalb der Geraden durch den Nullpunkt.



c) $(\bar{z} + 1)(z - 1) = 2i \cdot \mathsf{Im}\,(z)$
$\Leftrightarrow |z|^2 + z - \bar{z} - 1 = 2i \cdot \mathsf{Im}\,(z)$
Mit $z = x + iy$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + yi - x + yi - 1 = 2yi$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$
C ist der Einheitskreis in der komplexen Ebene.

Siehe nächstes Blatt!



3. Gleichungen mit komplexen Zahlen

Zum Lösen der Gleichungen arbeiten wir mit der polaren Form $z = re^{i\theta}$

a)

$$\begin{aligned} z^3 + 1 &= 0 \\ z^3 &= -1 \\ r^3 e^{i3\theta} &= 1e^{i\pi} \\ &\Rightarrow r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ &\Rightarrow 3\theta = \pi + 2\pi k \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \\ z &= e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k)} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2 \\ z &= \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\} \end{aligned}$$

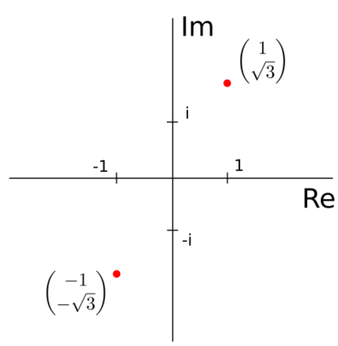
b)

$$\begin{aligned} z^2 + 4i &= 0 \\ z^2 &= -4i \\ r^2 e^{i2\theta} &= 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &\Rightarrow r = \sqrt{4} = 2 \\ &\Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ z &= 2e^{i\frac{3\pi}{4} + \pi k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1 \\ z &= \{2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Bonusaufgabe

$$
\begin{aligned}
z^2 - 2\left(\sqrt{3}i + e^{i\pi}\right) &= 0 \\
z^2 - 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) &= 0 \\
z^2 &= 2\left(\sqrt{3}i - 1\right) \\
z^2 &= -2 + 2\sqrt{3}i \\
z^2 &= 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\left(re^{i\theta}\right)^2 &= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
r^2 e^{i2\theta} &= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
&\Rightarrow r = \sqrt{4} = 2 \\
&\Rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\
&\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{6} + \pi k \\
z &= 2e^{i\left(\frac{2\pi}{6} + \pi k\right)} \quad \text{für} \quad k = 0, 1 \\
z &= \{2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}\} \\
&= \{1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$



Siehe nächstes Blatt!

5. MATLAB-Aufgabe

```
function fib=fibonacci(n)
% Berechnet die Fibonacci-Zahlen.
% Input: Natuerliche Zahl n.
% Output: Fibonacci-Zahlen f_0, ..., f_n.

% Initialisiere Null-Vektor, der die Fibonacci-Zahlen
% enthalten soll.
fib=zeros(1,n+1);

% Anfangswerte
fib(1)=0;
fib(2)=1;

% Iteration
for i=3:n+1
  fib(i)=fib(i-1)+fib(i-2);
end;
```

Fibonaccizahlen nr. 30 ist $f_{30} = 832040$.