Özlem Imamoglu
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung Serie 2

1. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 24 & 11 \end{pmatrix} \\
\mathbf{CA} &= \begin{pmatrix} 12+8i & -10-5i & 11+4i \\ 4i & -2-3i & 4+3i \end{pmatrix} \\
\mathbf{AI_3B} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 24 & 11 \end{pmatrix} \\
\mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}^2 &= \begin{pmatrix} 10 & -9 & 14 \\ 3 & 19 & 0 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix} \\
\mathbf{CC}^H &= \begin{pmatrix} 15 & 4-5i \\ 4+5i & 5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{I_3}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}^\top\mathbf{I_3} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{I_3y} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}^\top\mathbf{x} &= -11 \\
\mathbf{xy}^\top &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}^\top\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}^\top\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}^\top\mathbf{Bx} &= -2 \\
\mathbf{I_3D} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{ED} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k+e\mu & l+f\mu & m+g\mu & n+h\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{PD} = \begin{pmatrix} a & f & g & h \\ k & l & m & n \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{FD} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c & \alpha d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{GD} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \beta e & \beta f & \beta g & \beta h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}$$

Die Matrixprodukte $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{yI_3}$, und $\mathbf{yx}$ sind nicht definiert.

2. Bonusaufgabe

Damit $\mathcal{G}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation ist, müssen die folgenden Gesetze gezeigt werden.

Als erstes stellen wir aber fest, dass für beliebige Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{G} : \mathbf{AB} \in \mathcal{G}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -a_2b_1 - a_1b_2 & -a_2b_2 + a_1b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1b_1 - a_2b_2 \end{pmatrix}$$

Dies verkürzt den Aufwand in den folgenden Schritten, da immer nur zwei Elemente einer Matrix berechnet werden müssen.

1. Assoziativgesetz: Für alle Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{G}$ gilt: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \\
&= \mathbf{A}\begin{pmatrix} b_1c_1 - b_2c_2 & b_1c_2 + b_2c_1 \\ '' & '' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1) & a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2) \\ '' & '' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 & a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2 \\ '' & '' \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{AB})\mathbf{C} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ '' & '' \end{pmatrix}\mathbf{C} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2 & (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1 \\ '' & '' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 & a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 \\ '' & '' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Kommutativgesetz: Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{G}$ gilt: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\
\begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ '' & '' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 - b_2a_2 & b_1a_2 + b_2a_1 \\ '' & '' \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

3. Neutrales Element: Es gibt ein Element $\mathbf{E} \in \mathcal{G}$, so dass für alle $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ gilt: $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}
$$

4. Inverses Element: Zu jedem $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ gibt es ein $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{G}$ mit $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y:

$$
\begin{aligned}
a_1x - a_2y &= 1 \\
a_1y + a_2x &= 0
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die Lösung $x = \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, y = -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}$ und das Inverse Element:

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} & -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2} \\ \frac{a_2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Bitte wenden!

3. Zur Gleichheit: Es gilt $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{F}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{D}$. Es genügt, die Definitionen der Matrizen zu vergleichen. Die Gleichheit der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ sieht man ein, wenn man die dritte binomische Formel bei e_{ij} verwendet. Bei der Gleichheit der Matrizen B und F muss lediglich in den f_{ij} zusammengerechnet werden. Für die letzte Gleichheit muss man die Fälle unterscheiden, dass $j > i$ ist bzw. dass $j < i$ ist. Im ersten Fall ist nämlich $|j - i| = j - i$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu j, und auch $\max\{i, j\}$ ist gleich j. Im zweiten Fall ist $|j-i| = i-j$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu i, was wiederum gleich dem Maximum $\max\{i, j\}$ ist.

Siehe nächstes Blatt!

4. Gegeben seien die drei Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2+i \\ i & 2 & -3+i \\ 2+i & 3+i & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i & 4+3i \\ 1-2i & -4 & -2i \\ 4-3i & 2i & 7 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \\ -i & 2 & 3-i \\ -2-i & -3-i & 3 \end{pmatrix},$

$\mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i & 4+3i \\ 1-2i & -4 & -2i \\ 4-3i & 2i & 7 \end{pmatrix}.$

b) Wir sehen, dass $\mathbf{A}^H \neq \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^H \neq \mathbf{B}$, $\mathbf{C}^H = \mathbf{C}$. Damit ist einzig $\mathbf{C}$ hermitesch.

c) Damit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha i & 4-\beta i \\ 1+\alpha i & 0 & \gamma-3i \\ 4+2i & \beta+3i & -1 \end{pmatrix}.$$

hermitesch ist, muss $\mathbf{D}^H = \mathbf{D}$ gelten, also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-\alpha i & 4-2i \\ 1-\alpha i & 0 & \beta-3i \\ 4+\beta i & \gamma+3i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha i & 4-\beta i \\ 1+\alpha i & 0 & \gamma-3i \\ 4+2i & \beta+3i & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Vergleich der Nebendiagonaleinträge der Matrix liefert die folgenden 5 Gleichungen für die Unbekannten α, β und γ

$$\begin{aligned} 1-\alpha i &= 1+\alpha i \\ 4 \pm \beta i &= 4 \pm 2i \\ \gamma \pm 3i &= \beta \pm 3i \end{aligned}$$

Wir können nun Gauss-Elimination anwenden um α, β und γ zu bestimmen. Man sieht aber auch direkt, dass mit $\alpha = 0$, $\beta = 2$ und $\gamma = \beta = 2$ alle Gleichungen erfüllen sind.

Bitte wenden!

5. MATLAB-Aufgabe

a)
```
function B = hoch(A, k)
% Computes A^k for a square matrix A

        if k == 0
                % If k is zero, return the identity matrix
                B = eye(size(A));
        elseif mod(k, 2) == 0
                % If k is even, compute A^(k/2) ...
                tmp = hoch(A, k/2);
                % ... and return (A^(k/2))^2
                B = tmp*tmp;
        else
                % If k is odd, return A*(A^(k-1)) (k-1 is then even)
                B = A*hoch(A, k-1);
        end
end
```

Im Matlab Command Window:

```
>> A = [0 1; 1 1];
>> hoch(A, 35)
ans =
5702887     9227465
9227465    14930352
```

Also ist $f_{35} = 9227465$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Multiple-Choice-Aufgaben

1. Für welche Zahl $b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + (b+1)x_2 &= 4 \\ 2x_1 + bx_2 &= 1 \end{aligned}$$

keine Lösung?

(a) Für $b = 0$

√ (b) Für $b = -2$

(c) Für alle $b \in \mathbb{R}$

(d) Niemals

Damit keine Lösung existiert, muss es eine nicht erfüllte Veträglichkeitsbedingung geben: $(-b-2)x_2 = -7$. Für $b = -2$ ist dies der Fall.

2. Kann ein lineares Gleichungssystem genau 2 Lösungen haben?

(a) Ja

√ (b) Nein

Ein lineares Gleichungssystem kann nur keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben.

3. Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix, so dass $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$. Muss dann $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ sein?

(a) Ja

√ (b) Nein

Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, aber $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.