D-INFK Lineare Algebra HS 2020
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung Serie 1

1. Polar-, kartesische Form von komplexen Zahlen

a)

$$
\begin{aligned}
u+v+w &= (u+v)+w = (4+3i)+(4-5i) = (4+4)+(3-5)i = 8-2i \\
u\cdot v &= (1+i)\cdot(3+2i) = 3+2i+3i-2 = 1+5i \\
v\cdot w\cdot i &= (3+2i)\cdot(4-5i)\cdot i = (12-15i+8i+10)\cdot i = 12i+15-8+10i = 7+22i \\
\frac{w}{v} &= \frac{w}{v}\cdot\frac{\overline{v}}{\overline{v}} = \frac{(4-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-15i-10}{9+4} = \frac{2}{13}-\frac{23}{13}i \\
\frac{v}{u} &= \frac{v}{u}\cdot\frac{\overline{u}}{\overline{u}} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-2i+2}{1+1} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\
|v| &= \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

b) Um die Polarform $re^{i\theta}$ einer komplexen Zahl zu finden, rechnet man zuerst deren Betrag r aus. Dieser kann dann ausgeklammert werden und der dazu gehörende Winkel θ mit Hilfe von Trigonometrie auf dem Einheitskreis bestimmt werden.

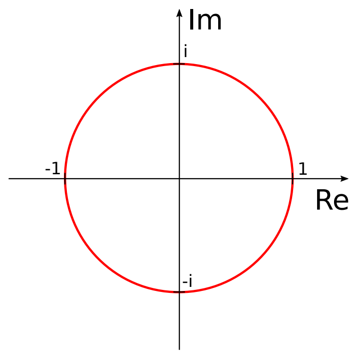
$$
\begin{aligned}
-3 &= 3(-1+0i) = 3(\cos\pi+\sin\pi i) = 3e^{i\pi} \\
i &= 1(0+i) = \cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \\
2\sqrt{3}+2i &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}
$$

c)

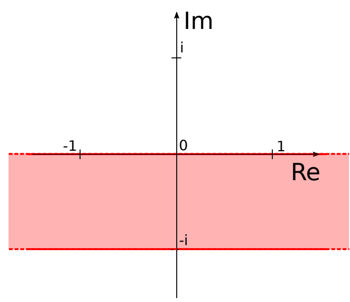
$$
\begin{aligned}
2e^{i\frac{4\pi}{3}} &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}i\right) = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i \\
\frac{2}{\pi}e^{i\frac{3\pi}{2}} &= \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}i\right) = \frac{2}{\pi}(0-i) = -\frac{2}{\pi}i
\end{aligned}
$$

2. Komplexe Mengen

a) Da $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ gilt $\overline{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.
A ist der Einheitskreis in der komplexen Ebene.



b) $z = x + iy \Rightarrow \mathsf{Re}\,(iz) = \mathsf{Re}\,(ix - y) = -y$
$0 < \mathsf{Re}\,(iz) < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 0$
B ist der Streifen aller Punkte zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = -1$, ohne die beiden Geraden.



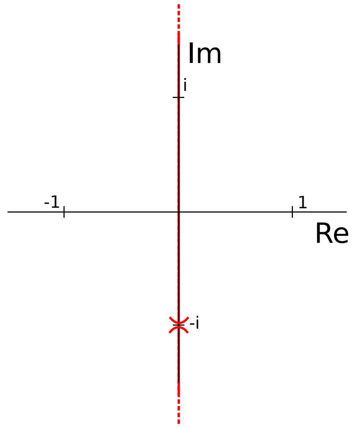
c) $\mathsf{Im}\,(\frac{z-i}{z+i})$ ist nur definiert, falls der Nenner nicht Null ist, d.h. für $z \neq -i$.
Mit $(z = x + iy)$ haben wir:

$$\mathsf{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \mathsf{Im}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right) = \mathsf{Im}\left(\frac{(x+i(y-1))(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}\right)$$

$(x+i(y-1))(x-i(y+1)) = x^2+ix(y-1)-ix(y+1)+(y-1)(y+1) = x^2-2ix+y^2-1$

Also ist $\mathsf{Im}\,(\frac{z-i}{z+i}) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = iy$.
C ist die imaginäre Achse ohne den Punkt $z = -i$.

Siehe nächstes Blatt!



3. Gleichungen mit komplexen Zahlen

Zum Lösen der Gleichungen arbeiten wir mit der polaren Form $z = re^{i\theta}$

a)

$$\begin{aligned} z^3 + 8 &= 0 \\ z^3 &= -8 \\ r^3 e^{i3\theta} &= 8e^{i\pi} \\ &\Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ &\Rightarrow 3\theta = \pi + 2\pi k \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \\ z &= 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k)} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2 \\ z &= \{2e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{i\pi}, 2e^{i\frac{5\pi}{3}}\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z^2 + i &= 0 \\ z^2 &= -i \\ r^2 e^{i2\theta} &= 1e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &\Rightarrow r = \sqrt{1} = 1 \\ &\Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ z &= e^{i\frac{3\pi}{4} + \pi k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1 \\ z &= \{e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. (Bonusaufgabe)

Um die Gleichung

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 = 0$$

zu lösen, wird zunächst z^2 ausgeklammert

$$z^2(z^2 - 2z + 3) = 0.$$

Damit ergibt sich die doppelte Nullstelle $z_{1,2} = 0$. Die Nullstellen des zweiten Faktors lassen sich mithilfe der quadratischen Formel für $z^2 + pz + q = 0$ lösen:

$$\begin{aligned} z_{3,4} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= 1 \pm \sqrt{1-3} \\ &= 1 \pm \sqrt{2}i, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. MATLAB-Aufgabe

```
function fib=fibonacci(n)
% Berechnet die Fibonacci-Zahlen.
% Input: Natuerliche Zahl n.
% Output: Fibonacci-Zahlen f_0, ..., f_n.

% Initialisiere Null-Vektor, der die Fibonacci-Zahlen
% enthalten soll.
fib=zeros(1,n+1);

% Anfangswerte
fib(1)=0;
fib(2)=1;

% Iteration
for i=3:n+1
  fib(i)=fib(i-1)+fib(i-2);
end;
```

Fibonaccizahlen nr. 30 ist $f_{30} = 832040$.