D-INFK
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2020

Musterlösung Serie 2

1. Gauss-Elimination

a) Das LGS kann mit folgenden Umformungen gelöst werden:

$$\begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\\hline\end{array}$$

Dieses System hat nun die obere Dreiecksgestalt (upper triangular form) und kann via Rückwärtseinsetzen gelöst werden:

$$\begin{aligned} -12x_3 = -12 \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = (-12)/(-12) = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 3 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = (3 - 5 \cdot 1)/2 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

Alternativ kann das System weiter vereinfacht werden, indem auch die oberen Elemente des Systems eliminiert werden. Am Schluss teilen wir die Zeilen noch durch den Betrag der Pivotelemente:

$$\begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\\hline\end{array}$$

Damit erhalten wir links eine Schema mit Diagonalelemente vom Wert 1, so dass die Lösung einfach von der rechten Spalte abgelesen werden kann: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1$.

b) Da das Pivot der ersten Zeile 0 ist, tauschen wir diese mit der 2. Zeile:

$$\begin{array}{|rrrrr|r|}\hline 0 & 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ -2 & 6 & 11 & -1 & 10 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & 6 & 21 & 6 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrrrr|r|}\hline -1 & 2 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 11 & -1 & 10 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & 6 & 21 & 6 \\\hline\end{array}$$

Dann eliminieren wir das Schema weiter bis zur Zeilenstufenform (row echelon form):

$$\sim \begin{array}{|rrrrr|r|}\hline -1 & 2 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\\hline\end{array} \sim \begin{array}{|rrrrr|r|}\hline -1 & 2 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\\hline\end{array}$$

Von diesem sehen wir, dass das LGS unendlich viele Lösungen hat, wobei x_3, $x_5 \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden können und x_1, x_2, x_4 von diesen wie folgend abhängig sind:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (-2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 7x_5 + 2)/(-1) \\
x_2 &= (-3x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 1)/2 \\
x_4 &= (9x_5 - 2)/(-7).
\end{aligned}
$$

c) Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir:

$$
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & a & -2 & 0 \\
a & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & a & -1 & 0 \\
0 & 1 & -a & 0 \\
\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -a & 0 \\
0 & a & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -a & 0 \\
0 & 0 & a^2 - 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Somit muss $a = \pm 1$ sein, damit es eine nichttriviale Lösung gibt:

$$x_3 = s, x_2 = as, x_1 = -s, \text{wobei } s \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Bonusaufgabe

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3 kann also beliebig gestetzt werden. Eine Lösung lautet also Beispielsweise

$$\mathbf{x} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)^\top .$$

b) Durch die Gauss-Elimination sehen wir, dass das System nur zwei linear unabhängige Zeilen hat. Damit ist der Rang 2.

c) Eine weitere Lösung $\mathbf{y}$ erhält man, indem man z.B. $x_3 = 1$ wählt. Sie muss automatisch linear unabhängig zu $\mathbf{x}$ sein, da dort $x_3 = 0$ gilt.

$$\mathbf{y} = (-1, 1, 1)^\top \tag{1}$$

d) Mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ergibt sich $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$. Durch subtrahieren der Gleichungen erhalten wir

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{Ay} = \mathbf{b} - \mathbf{b} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Damit ist $\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ eine Lösung.

e) Da der Rang 2 ist wissen wir, dass die Lösung 1-Dimensional sein muss. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ haben wir also

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z}) = \mathbf{Ax} + \lambda\mathbf{Az} = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{0} = \mathbf{b} \tag{5}$$

Die Lösungsmenge kann also beispielsweise dargestellt werden als

$$\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \tag{6}$$

oder

$$\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Bitte wenden!

3. MATLAB-Aufgabe

a)
```
function x = gauss( A, b )

% A is a n*n matrix and b a n*1 vector

    % get length of vector b
        n = length(b);

        % If there is no unique solution then "false" is returned
        x = false;

        % We use the Gauss algorithm to transform B into
        % the form [I, x]
        B = [A, b];

        % Transform B into upper triangular form
        for k = 1:n

                % Zero column?
                if all(abs(B(k:n, k)) < eps)
                        % No unique solution; return with x=false
                        return;
                end

                % Find pivot element
                [pivot, pivotInd] = max(abs(B(k:n, k)));

                % Index of pivot element
                pivotInd = pivotInd + (k-1);
                pivot = B(pivotInd, k);

                % Swap pivot row
                temp = B(k, :);
                B(k, :) = B(pivotInd, :);
                B(pivotInd, :) = temp;

                % Normalize row
                B(k, :) = B(k, :) / pivot;

                % Eliminate rest of column
                for l = k+1:n
                        B(l,:) = B(l,:) - B(k,:)*B(l,k);
                end
        end
```

```
        % Transform B into the form [I, x]
        for k = (n-1):-1:1
                for l = k:-1:1
                        B(l,:) = B(l,:) - B(k+1,:)*B(l,k+1);
                end
        end

        % x is now the last column of B
        x = B(:, n+1);
end
```

Eingabe:

» A = [0 2 -2 2; 0 -2 7 1; 5 5 6 -5; 5 1 1 -3]
» b = [14; -18; 3; 5]
» x = gauss(A,b)

» x =

2 3 -2 2

» A*x

ans =

14 -18 3 5

Bitte wenden!

4. Multiple-Choice-Aufgaben

1. Wir betrachten die Ebenen im Raum mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} x + \quad y - \quad z &= 0 \\ 4x - \quad y + \quad 5z &= 0 \\ 6x + \quad y + \quad 4z &= 0. \end{aligned}$$

Diese Ebenen

(a) haben keinen Schnittpunkt.

$\surd$ (b) haben genau einen Schnittpunkt.

(c) haben eine Gerade als Schnittmenge.

(d) sind gleich.

2. [Frei nach einer englischen Übersetzung vom chinesischen Mathematikbuch *Jiu Zhang Suanshu*, 200 B.C.] Wenn wir zwei Kühe und 5 Schafe verkaufen und 13 Schweine kaufen, verdienen wir 100 Münzen. Wenn wir 3 Kühe und 3 Schweine verkaufen und 9 Schafe kaufen, machen wir weder Gewinn noch Verlust. Wenn wir 6 Schafe und 8 Schweine verkaufen und 5 Kühe kaufen, verlieren wir 60 Münzen.

Wie viel kosten eine Kuh, ein Schwein und ein Schaf zusammen?

Hinweis: Man kann mit den gegebenen Informationen den Preis von jedem Tier bestimmen.

(a) 20 Münzen

(b) 100 Münzen

(c) 120 Münzen

$\surd$ (d) 200 Münzen

Siehe nächstes Blatt!

3. Für welche Zahl $b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + (b+1)x_2 &= 4 \\ 2x_1 + bx_2 &= 1 \end{aligned}$$

keine Lösung?

(a) Nur für $b = 0$

√ (b) Nur für $b = -2$

(c) Für alle $b \in \mathbb{R}$

(d) Niemals

Damit keine Lösung existiert, muss es eine nicht erfüllte Veträglichkeitsbedingung geben: $(-b-2)x_2 = -7$. Für $b = -2$ ist dies der Fall.

4. Welche der folgenden Matrizen sind nicht in Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

√ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Die Zeilenstufenform der Koeffizientematrix eines linearen Gleichungssystems sieht wie folgend aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a) Das lineare Gleichungssystem hat 6 Variablen.

$\surd$ (b) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.