Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 2

1. Gauss-Elimination

a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & -1, \end{array} \tag{1}$$

welches man als das Eliminationsschema

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \end{array} \tag{2}$$

schreiben kann. Lösen Sie das LGS (1) mittels Gauss-Elimination des Eliminationsschemas (2).

b) Schreiben Sie das folgende LGS als ein Eliminationsschema und lösen Sie es damit. Gibt es keine, eine oder unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & 11x_3 & - & x_4 & + & 10x_5 & = & 3 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & + & 12x_3 & + & 6x_4 & + & 21x_5 & = & 6 \end{array} \tag{3}$$

c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

eine nichttriviale (von 0 verschiedene) Lösung? Geben Sie für diese Fälle alle möglichen Lösungen an.

Bitte wenden!

2. Gauss-Elimination (Bonusaufgabe)

a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} , \tag{5}$$

mit dem Eliminationsschema

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{array} . \tag{6}$$

Geben Sie eine Lösung $\mathbf{x}$ des LGS (5) an.

b) Wie lautet der Rang des Systems?

c) Finden Sie eine weitere Lösung $\mathbf{y}$ des LGS (5), so dass $\mathbf{x} \neq \lambda \mathbf{y}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Konstruieren Sie aus beiden Lösungen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ eine Lösung der Gleichung

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array} \tag{7}$$

die ungleich des Nullvektors ist. In (7) wurde gegenüber (6) lediglich die rechte Seite des Gleichungssystems durch den Nullvektor ersetzt.

e) Konstruieren Sie aus beiden Lösungen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ die komplette Lösungsmenge des Gleichungssystems (5).

Siehe nächstes Blatt!

3. MATLAB-Aufgabe: **Gauss-Verfahren**

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function x = gauss(A, b)`, die als Input eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und einen $n \times 1$ Vektor $\mathbf{b}$ nutzt und die Lösung $\mathbf{x}$ von

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{8}$$

mit Gauss-Elimination findet und zurückgibt. Die Funktion soll "`false`" zurückgeben, falls (8) keine oder unendlich viele Lösungen hat. Zuerst soll die Zeilenstufenform der Matrix $\mathbf{A}$ berechnet werden, anschliessend durch Rückwärtseinsetzen die Lösung des Gleichungssystems.

Verwenden Sie die Vorlage gauss.m von der Homepage der Vorlesung.

Testen Sie Ihre Funktion für das Lösen der Gleichung (8) mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

und prüfen Sie ab, ob die Lösung `x=gauss(A,b)` die Gleichung (8) erfüllt.

Bitte wenden!

4. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Wir betrachten die Ebenen im Raum mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} x + \quad y - \quad z &= 0 \\ 4x - \quad y + \quad 5z &= 0 \\ 6x + \quad y + \quad 4z &= 0. \end{aligned}$$

Diese Ebenen

(a) haben keinen Schnittpunkt.

(b) haben genau einen Schnittpunkt.

(c) haben eine Gerade als Schnittmenge.

(d) sind gleich.

2. [Frei nach einer englischen Übersetzung vom chinesischen Mathematikbuch *Jiu Zhang Suanshu*, 200 B.C.] Wenn wir zwei Kühe und 5 Schafe verkaufen und 13 Schweine kaufen, verdienen wir 100 Münzen. Wenn wir 3 Kühe und 3 Schweine verkaufen und 9 Schafe kaufen, machen wir weder Gewinn noch Verlust. Wenn wir 6 Schafe und 8 Schweine verkaufen und 5 Kühe kaufen, verlieren wir 60 Münzen.

Wie viel kosten eine Kuh, ein Schwein und ein Schaf zusammen?

Hinweis: Man kann mit den gegebenen Informationen den Preis von jedem Tier bestimmen.

(a) 20 Münzen

(b) 100 Münzen

(c) 120 Münzen

(d) 200 Münzen

3. Für welche Zahl $b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + (b+1)x_2 &= 4 \\ 2x_1 + bx_2 &= 1 \end{aligned}$$

keine Lösung?

(a) Nur für $b = 0$

(b) Nur für $b = -2$

(c) Für alle $b \in \mathbb{R}$

(d) Niemals

4. Welche der folgenden Matrizen sind nicht in Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bitte wenden!

5. Die Zeilenstufenform der Koeffizientematrix eines linearen Gleichungssystems sieht wie folgend aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Das lineare Gleichungssystem hat 6 Variablen.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.

Abgabe: Freitag 9. Oktober, 15:00

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`