Musterlösung Serie 3

1. Es gilt:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 24 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 12+8i & -10-5i & 11+4i \\ 4i & -2-3i & 4+3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AI_3B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 24 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 14 \\ 3 & 19 & 0 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{CC}^\top = \begin{pmatrix} 5+10i & i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I_3}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I_3y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{x} = -11$$

$$\mathbf{xy}^\top = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^\top\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{Bx} = -2$$

$$\mathbf{I_3D} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\mathbf{ED} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k+e\mu & l+f\mu & m+g\mu & n+h\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{PD} = \begin{pmatrix} a & f & g & h \\ k & l & m & n \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{FD} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c & \alpha d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{GD} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \beta e & \beta f & \beta g & \beta h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}$$

Die Matrixprodukte $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{yI_3}$, und $\mathbf{yx}$ sind nicht definiert.

Siehe nächstes Blatt!

2. Zur Gleichheit: Es gilt $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{F}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{D}$. Es genügt, die Definitionen der Matrizen zu vergleichen. Die Gleichheit der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ sieht man ein, wenn man die dritte binomische Formel bei e_{ij} verwendet. Bei der Gleichheit der Matrizen B und F muss lediglich in den f_{ij} zusammengerechnet werden. Für die letzte Gleichheit muss man die Fälle unterscheiden, dass $j > i$ ist bzw. dass $j < i$ ist. Im ersten Fall ist nämlich $|j - i| = j - i$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu j, und auch $\max\{i, j\}$ ist gleich j. Im zweiten Fall ist $|j-i| = i-j$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu i, was wiederum gleich dem Maximum $\max\{i, j\}$ ist.

Bitte wenden!

3. Bonusaufgabe

a) Ein Vektor $\mathbf{x}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ wenn die Skalarprodukte mit diesen Vektoren verschwinden, also:

$$\mathbf{v}_1^\top \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{v}_2^\top \mathbf{x} = 0, \quad \ldots \quad , \mathbf{v}_m^\top \mathbf{x} = 0.$$

Dies enspricht genau dem Ausdruck $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, da

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_2^\top \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

b) Sei X die Menge der Vektoren die auf $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ senkrecht stehen:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Für die Summe $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ zweier Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ gilt

$$\mathbf{Az} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt $\mathbf{z} \in X$. Darüberhinaus gilt mit $a \in \mathbb{R}$ für vielfache des Elements $\mathbf{x}$

$$\mathbf{A}(a\mathbf{x}) = a\mathbf{Ax} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

und damit $a\mathbf{x} \in X$. Die addition und skalare Multiplikation der Menge X ist also abgeschlossen.

c) Nach Aufgabenteil **a)** gilt es den Kern der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Gausselimination liefert folgende Zeilen-Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -18 \end{pmatrix}.$$

Eine nicht-triviale Lösung der Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}^\top$. Die Letzte Komponente wurde hier auf den Wert 4 gesetzt, jeder andere Wert führt zu einer alternativen Lösung. Die Menge aller Vielfachen einer Lösung bildet die Menge der gesuchten Vektoren.

Siehe nächstes Blatt!

4. MATLAB-Aufgabe

a)
```
function B = hoch(A, k)
% Computes A^k for a square matrix A

        if k == 0
                % If k is zero, return the identity matrix
                B = eye(size(A));
        elseif mod(k, 2) == 0
                % If k is even, compute A^(k/2) ...
                tmp = hoch(A, k/2);
                % ... and return (A^(k/2))^2
                B = tmp*tmp;
        else
                % If k is odd, return A*(A^(k-1)) (k-1 is then even)
                B = A*hoch(A, k-1);
        end
end
```

Im Matlab Command Window:

```
>> A = [0 1; 1 1];
>> hoch(A, 35)
ans =
5702887     9227465
9227465    14930352
```

Also ist $f_{35} = 9227465$.

Bitte wenden!

5. Multiple-Choice-Aufgaben

1. Ist $\mathbf{A}^2$ definiert, so muss $\mathbf{A}$ quadratisch sein.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

2. Ist $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

3. Ist $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

4. Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$).

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

5. Ist $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

6. Sind beide Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ definiert, so müssen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratisch sein.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

Siehe nächstes Blatt!

7. Sind beide Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ definiert, so müssen $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ quadratisch sein.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

8. Sind zwei Spalten von $\mathbf{A}$ gleich, so müssen die entsprechenden Spalten von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

9. Sind zwei Spalten von $\mathbf{B}$ gleich, so müssen die entsprechenden Spalten von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

10. Sind zwei Zeilen von $\mathbf{A}$ gleich, so müssen die entsprechenden Zeilen von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

11. Sind zwei Zeilen von $\mathbf{B}$ gleich, so müssen die entsprechenden Zeilen von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

12. Wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen sind, ist $\mathbf{AB}$ auch symmetrisch.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

Bitte wenden!

13. Für $n \times n$ Matrizen gilt $\mathbf{ABC} = \mathbf{CBA}$.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

14. Für $n \times n$ Matrizen gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A}$.

(a) Ja

$\surd$ (b) Nein

15. Der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\frac{\pi}{3}$.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein