Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 3

1. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i \\ 2 & i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$$\mathbf{AB}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{AC}, \quad \mathbf{CA}, \quad \mathbf{AI_3B}, \quad \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{A}^2 := \mathbf{AA}, \quad \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{CC}^\top, \quad \mathbf{I_3}^2, \quad \mathbf{yI_3}, \quad \mathbf{y}^\top\mathbf{I_3},$$
$$\mathbf{I_3y}, \quad \mathbf{y}^\top\mathbf{x}, \quad \mathbf{yx}, \quad \mathbf{xy}^\top, \quad \mathbf{B}^\top\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^\top\mathbf{B}, \quad \mathbf{y}^\top\mathbf{Bx}, \quad \mathbf{I_3D}, \quad \mathbf{ED}, \quad \mathbf{FD}, \quad \mathbf{GD}, \quad \mathbf{PD}$$

2. Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } a_{ij} = i \cdot j \\
\mathbf{B} &= (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } b_{ij} = i + j \\
\mathbf{C} &= (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } c_{ij} = \max\{i, j\} \\
\mathbf{D} &= (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } d_{ij} = \frac{i+j}{2} + \frac{|i-j|}{2} \\
\mathbf{E} &= (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } e_{ij} = i \cdot \left(\frac{j^2-1}{j+1} + 1\right) \\
\mathbf{F} &= (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } f_{ij} = (i+1) + (j-1)
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. (Bonusaufgabe)
Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ ist die reelle Zahl gegeben durch

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \,.$$

Wir sagen, dass Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ senkrecht aufeinander stehen, falls $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$.

a) Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Bilden Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mit Zeilen $\mathbf{v}_1^\top, \mathbf{v}_2^\top, \ldots, \mathbf{v}_m^\top$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dann genau die Menge aller Vektoren ist, die auf $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ senkrecht stehen.

b) Zeigen Sie, dass Vektoraddition und Skalarmultiplikation in der Menge aller Vektoren, die auf $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ senkrecht stehen, wohldefiniert sind, d.h., diese Menge ist *abgeschlossen* bezüglich diesen Operationen.

c) Finden Sie alle Vektoren in $\mathbb{R}^4$ die senkrecht stehen auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4. MATLAB-Aufgabe

Die Matrix-Potenz $\mathbf{A}^k$ kann man durch

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{falls } k = 0 \\ \left(\mathbf{A}^{k/2}\right)^2 & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnen, wobei $\mathbf{I}$ die Identitätsmatrix bezeichnet.

a) Schreiben Sie eine Funktion `function B = hoch(A, k)`, die für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ die Potenz $\mathbf{A}^k$ berechnet und zurückgibt. Sie dürfen *nicht* die Potenz-Operatoren `^` oder `power` benutzen, sondern *nur* das Matrix-Produkt `*`.

b) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} \qquad \text{für } k \geq 1,$$

wobei f_k die Fibonacci-Reihe bezeichnet. Finden Sie f_{35} mit Ihrer Funktion `hoch`.

Siehe nächstes Blatt!

5. Geben Sie für die folgenden Aussagen an ob sie korrekt oder falsch sind.

1. Ist $\mathbf{A}^2$ definiert, so muss $\mathbf{A}$ quadratisch sein.

(a) Ja

(b) Nein

2. Ist $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

(a) Ja

(b) Nein

3. Ist $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

(a) Ja

(b) Nein

4. Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$).

(a) Ja

(b) Nein

5. Ist $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

(a) Ja

(b) Nein

6. Sind beide Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ definiert, so müssen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratisch sein.

(a) Ja

(b) Nein

Bitte wenden!

7. Sind beide Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ definiert, so müssen $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ quadratisch sein.

(a) Ja

(b) Nein

8. Sind zwei Spalten von $\mathbf{A}$ gleich, so müssen die entsprechenden Spalten von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

(b) Nein

9. Sind zwei Spalten von $\mathbf{B}$ gleich, so müssen die entsprechenden Spalten von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

(b) Nein

10. Sind zwei Zeilen von $\mathbf{A}$ gleich, so müssen die entsprechenden Zeilen von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

(b) Nein

11. Sind zwei Zeilen von $\mathbf{B}$ gleich, so müssen die entsprechenden Zeilen von $\mathbf{AB}$ auch gleich sein.

(a) Ja

(b) Nein

12. Wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen sind, ist $\mathbf{AB}$ auch symmetrisch.

(a) Ja

(b) Nein

Siehe nächstes Blatt!

13. Für $n \times n$ Matrizen gilt $\mathbf{ABC} = \mathbf{CBA}$.

(a) Ja

(b) Nein

14. Für $n \times n$ Matrizen gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A}$.

(a) Ja

(b) Nein

15. Der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\frac{\pi}{3}$.

(a) Ja

(b) Nein

Abgabe: Bis spätestens Freitag 16. Oktober 2020, 15:00.

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`