Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 4

1. Wir finden die Inverse von $\mathbf{A}$ mit Hilfe von Zeilenoperationen im Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & -b & -c+bd \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a} & \frac{-c+bd}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Damit erhalten wir die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a} & \frac{-c+bd}{a} \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus schliessen wir, dass wenn $a \neq 0$ ist, $\mathbf{A}$ immer invertierbar ist.

2. Wir verwenden die Definition des Matrixproduktes und die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varphi_1)\cdot\mathbf{Q}(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Matrixprodukt $\mathbf{Q}(\varphi_1)\mathbf{Q}(\varphi_2)$ ist also eine Rotationsmatrix $\mathbf{Q}(\varphi_1+\varphi_2)$ mit dem Rotationswinkel $\varphi_1+\varphi_2$ gegen den Uhrzeigersinn.

3. a)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{LR} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -7 \\ 3 & 10 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

also

$$
\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Hinweis: Die LR-Zerlegung ist nicht eindeutig und es gibt gültige Variationen davon. Es muss aber immer gelten $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$, wobei $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ jeweils eine untere und obere Dreiecksmatrix sind, und $\mathbf{P}$ eine gültige Permuationsmatrix.

b) Wir lösen zuerst $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$ und danach $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$.

$$
\mathbf{PAx} = (\mathbf{LR})\mathbf{x} = \mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}.
$$

- $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}
$$

  somit $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top$.

- $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

  somit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Bonusaufgabe

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -30 & 30 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}$$

b) Einsetzten der Zerlegung in $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^\top$ liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{LRx} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^\top \\ \Rightarrow \mathbf{Ly} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^\top \\ \Rightarrow \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen in $\mathbf{R}$ liefert $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ (wenn man 0 für die letzte Komponente von $\mathbf{x}$ wählt).

Um alle Lösungen zu finden, wird der Kern der Matrix bestimmt. Da der Rang der Matrix $\mathbf{R}$ den Wert 3 hat, ist der Kern 1-dimensional. Aus $\mathbf{Ly}_0 = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{y}_0 = 0$. Wir suchen also den Kern von $\mathbf{R}$ der durch jede nicht-triviale Lösung der Gleichung $\mathbf{Rx}_0 = \mathbf{0}$ aufgespannt wird. Für die letzte Komponenten von $\mathbf{x}_0$ kann beispielsweise der Wert 1 gewählt werden. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich damit:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$$

als nicht triviale Lösung und insgesamt die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Andere Charakterisierungen der Lösungsmenge sind durch eine andere Wahl der freien Parameter möglich.

5. a)

```
>> A = [1 -2 -2 10;-3 8 1 0;1 0 5 -5;-9 5 -3 15];
>> [L,R] = mylr(A)
```

Bitte wenden!

```
L =
1            0            0            0
-3            1            0            0
1            1            1            0
-9         -6.5      -4.4583            1


R =
1           -2           -2           10
0            2           -5           30
0            0           12          -45
0            0            0       99.375

>> A-L*R

ans =

0     0     0     0
0     0     0     0
0     0     0     0
0     0     0     0
```

b) Wenn wir die Hilfe des MATLAB-Befehls aufrufen (`help lu`), sehen wir, dass optional auch eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ mit `[L,U,P] = lu(A)` zurückgeben werden kann. Die LR-Zerlegung wendet also eine Pivotstrategie an, wodurch Zeilen getauscht werden können. Dies macht die Zerlegung numerisch stabiler, resultiert aber in einer anderen LR-Zerlegung.

6. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\mathbf{E}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, mit dem Wert 1 für das Element (i,j) und 0 für alle anderen Elemente. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt. Beachten Sie die Reihenfolge im Produkt.

(a) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren i-te Zeile gleich der j-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Zeilen sind gleich Null.

(b) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren j-te Zeile gleich der i-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Zeilen sind gleich Null.

(c) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren i-te Spalte gleich der j-te Spalte von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Spalten sind gleich Null.

$\surd$ (d) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren j-te Spalte gleich der i-te Spalte von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Spalten sind gleich Null.

2. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die einzige 2×2 Permutationsmatrix.

$\surd$ (b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

(c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

(d) Jede orthogonale 2×2 Matrix entspricht einer Rotation um einen Winkel ϑ und ist von der Form $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ mit $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, invertierbare Matrix. Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ ist stets symmetrisch.

$\surd$ (a) Korrekt

(b) Falsch

Bitte wenden!

4. Wenn $\mathbf{A}$ eine invertierbare Matrix über $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, so ist $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}$ invertierbar.

(a) Korrekt

$\surd$ (b) Falsch

5. Sei $\mathbf{A}$ eine $2m \times 2m$ Blockmatrix der Form

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & a\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right),$$

wobei $a \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{I}$ die $m \times m$ Einheitsmatrix ist. Die n-te Potenz von $\mathbf{A}$ hat die Form

$$\mathbf{A}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & na\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right).$$

$\surd$ (a) Korrekt

(b) Falsch

6. Die folgenden $n \times n$ Blockmatrizen mit $n = n_1 + n_2 + 1$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$ sind inverse voneinander:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{v} & \mathbf{I}_{n_2} \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{v} & \mathbf{I}_{n_2} \end{array}\right).$$

$\surd$ (a) Korrekt

(b) Falsch

Siehe nächstes Blatt!

7. In welchen der folgenden Fällen ist der Rechenaufwand für das Lösen mit der LR-Zerlegung kleiner als mit direkter Gauss-Elimination?

(a) Ein System mit mehreren linearen Gleichungen.

(b) Mehrere unterschiedliche lineare Gleichungssysteme mit der gleichen rechten Seite.

$\surd$ (c) Mehrere unterschiedliche lineare Gleichungssysteme mit den gleichen Koeffizientenmatrizen.

(d) Ein System mit weniger als 10 linearen Gleichungen.

Der Rechenaufwand für die LR–Zerlegung und das Vor- und Rück-wärtseinsetzen ist genau gleich wie für die Gauss-Elimination für ein gegebenes fixes System. Für eine variierende rechte Seite jedoch, muss die LR-Zerlegung nicht mehr gemacht werden und ist somit schneller als die Gauss-Elimination.

8. Das Lösen eines linearen Gleichungssystems der Form $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{X}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times \frac{n}{2}}$ und $n = 2000$, dauert auf einem bestimmten System 15 Sekunden. Wie lange dauert es etwa für die Berechnung mit $n = 4000$, wobei wir annehmen, dass alle Rechengrundoperation gleich lange brauchen?

(a) 15s

(b) 30s

$\surd$ (c) 120s

(d) 225s

Der Rechenaufwand für die LR-Zerlegung einer $n\times n$ Matrix wird mit $(\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2)+(\frac{1}{3}n^3)+n$ (Additionen + Multiplikationen + Divisionen) $= \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + n$ abgeschätzt. Für das Vor- und Rück-wärtseinsetzen rechnen wir mit einem Aufwand von $((n^2 - n) + (n^2)) * \frac{n}{2}$ Rechenoperationen. Daraus ergibt sich ein Total von $\frac{5}{3}n^3 - n^2 + n$ Rechenoperationen. Teilen wir nun die benötigte Zeit von 15 Sekunden durch die Anzahl der Rechenoperationen erhalten wir die Zeit für eine einzelne Grundoperation und können damit die geschätzte Zeit für $n = 4000$ berechnen.