Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 4

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a, b, c, d ist $\mathbf{A}$ invertierbar? Geben Sie für diese Fälle $\mathbf{A}^{-1}$ an.

2. Rotationsmatrizen

Eine reelle 2×2 Matrix ist eine *Rotationsmatrix*, wenn sie für einen Rotationswinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ von der folgenden Form ist:

$$\mathbf{Q}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt $\mathbf{Q}(\varphi_1)\,\mathbf{Q}(\varphi_2)$ zweier Rotationsmatrizen mit den Winkeln φ_1, φ_2 wieder eine Rotationsmatrix $\mathbf{Q}(\varphi)$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Rotationswinkel φ.

3. LR-Zerlegung

Sei $\mathbf{A}$ die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -7 \\ 3 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Gegeben sei nun eine neue Zerlegung $\mathbf{PB} = \mathbf{LR}$ einer Matrix $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$, wobei

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

durch Vor- und Rückwärtseinsetzen. Überprüfen Sie anschließend ihre Lösung.

Bitte wenden!

4. Bonusaufgabe

Gegeben ist das unterbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ lässt sich mithilfe der LR-Zerlegung darstellen als $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$, wobei $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

a) Bilden Sie die LR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ ohne Pivoting.

b) Verwenden Sie die Zerlegung um alle Lösungen des Gleichungssystems zu bestimmen.

5. MATLAB-Aufgabe

a) Implementieren Sie jetzt die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$ als MATLAB-Funktion.

```
function [L,R] = mylr(A)
```

Testen Sie Ihre Implementierung mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 10 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -9 & 5 & -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat des MATLAB-Befehls `[L,U] = lu(A)`. Erhalten Sie das Gleiche? Wenn nicht, weshalb?

Siehe nächstes Blatt!

6. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\mathbf{E}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, mit dem Wert 1 für das Element (i, j) und 0 für alle anderen Elemente. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt. Beachten Sie die Reihenfolge im Produkt.

(a) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren i-te Zeile gleich der j-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Zeilen sind gleich Null.

(b) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren j-te Zeile gleich der i-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Zeilen sind gleich Null.

(c) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren i-te Spalte gleich der j-te Spalte von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Spalten sind gleich Null.

(d) $\mathbf{AE}_{ij}$ ist eine Matrix deren j-te Spalte gleich der i-te Spalte von $\mathbf{A}$ ist. Alle andere Spalten sind gleich Null.

2. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die einzige 2×2 Permutationsmatrix.

(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

(c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

(d) Jede orthogonale 2×2 Matrix entspricht einer Rotation um einen Winkel ϑ und ist von der Form $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ mit $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, invertierbare Matrix. Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ ist stets symmetrisch.

(a) Korrekt

(b) Falsch

Bitte wenden!

4. Wenn $\mathbf{A}$ eine invertierbare Matrix über $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, so ist $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}$ invertierbar.

(a) Korrekt

(b) Falsch

5. Sei $\mathbf{A}$ eine $2m \times 2m$ Blockmatrix der Form

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & a\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right),$$

wobei $a \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{I}$ die $m \times m$ Einheitsmatrix ist. Die n-te Potenz von $\mathbf{A}$ hat die Form

$$\mathbf{A}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & na\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right).$$

(a) Korrekt

(b) Falsch

6. Die folgenden $n \times n$ Blockmatrizen mit $n = n_1 + n_2 + 1$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$ sind inverse voneinander:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{v} & \mathbf{I}_{n_2} \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{v} & \mathbf{I}_{n_2} \end{array}\right).$$

(a) Korrekt

(b) Falsch

7. In welchen der folgenden Fällen ist der Rechenaufwand für das Lösen mit der LR-Zerlegung kleiner als mit direkter Gauss-Elimination?

(a) Ein System mit mehreren linearen Gleichungen.

(b) Mehrere unterschiedliche lineare Gleichungssysteme mit der gleichen rechten Seite.

(c) Mehrere unterschiedliche lineare Gleichungssysteme mit den gleichen Koeffizientenmatrizen.

(d) Ein System mit weniger als 10 linearen Gleichungen.

8. Das Lösen eines linearen Gleichungssystems der Form $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{X}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times \frac{n}{2}}$ und $n = 2000$, dauert auf einem bestimmten System 15 Sekunden. Wie lange dauert es etwa für die Berechnung mit $n = 4000$, wobei wir annehmen, dass alle Rechengrundoperation gleich lange brauchen?

(a) 15s

(b) 30s

(c) 120s

(d) 225s

Abgabe: Bis spätestens 15:00 Uhr, Freitag 23. Oktober 2020.

http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/