Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 5

1. Betrachte die k Elemente $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ im Vektorraum V.

$a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + ... + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = ... = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.

Falls jedes Element b von V als Linearkombination der Elemente $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Elemente $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **erzeugend**.

Falls V die Dimension N hat, gilt allgemein:

- Falls $k < N$, sind $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **nicht erzeugend**.
- Falls $k > N$, sind $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ **linear abhängig**.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\dim\ V = nm$. Wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mithilfe der Gauss–Elimination systematisieren:

Für jeden Vektorraum V wählen wir zuerst eine möglichst einfache Basis. Alle gegebenen Elemente können dann eindeutig als lineare Kombination dieser Basisvektoren ausgedrückt werden. Die entsprechenden Koordinatenvektoren schreiben wir als Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ ist damit eine $nm \times k$-Matrix, wobei nm die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Schema können wir $r = \mathrm{Rang}\,\mathbf{A}$ bestimmen.

Die Elemente $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = nm$.

Sie bilden also eine alternative Basis für $\mathbb{R}^{n\times m}$, falls $r = k = nm$.

a) Wir wählen die Standardbasis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $nm = 3, k = 3, r = 2$. Da $r < k$ ist, sind die Elemente linear abhängig und da $r \neq nm$ ist, sind sie nicht erzeugend.

Bitte wenden!

b) Wir wählen die Standardbasis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{1\times 4}$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $nm = 4, k = r = 3$. Da $r = k$ ist, sind die Elemente linear unabhängig und da $r \neq nm$ ist, sind sie nicht erzeugend.

c) Wir wählen die Standardbasis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben $nm = k = r = 4$, und damit sind die Elemente linear unabhängig und erzeugend (bilden eine Basis).

d) Wir wählen die Standardbasis $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $r = nm = 2$, $k = 3$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = nm$ ist, sind sie erzeugend.

2. Untervektorräume

Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{U}$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$ heisst Unterraum, falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. falls gezeigt werden kann, dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ und $\alpha \in \mathbb{E}$ folgendes gilt:

1. $\mathcal{U} \neq \emptyset$, oder äquivalent, dass der Nullvektor von $\mathcal{V}$ auch in $\mathcal{U}$ ist.
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{U}$.
3. $\alpha \mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

a)
1. Der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^4$ erfüllt die Gleichung $2x + 4y + 3z + 7w = 0$.
2. Wir zeigen, dass die Summe zweier beliebiger Lösungsvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

auch wieder die Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} A) \quad & 2x_1 + 4y_1 + 3z_1 + 7w_1 = 0 \\ B) \quad & 2x_2 + 4y_2 + 3z_2 + 7w_2 = 0 \\ \\ A + B) \quad & 2x_1 + 2x_2 + 4y_1 + 4y_2 + 3z_1 + 3z_2 + 7w_1 + 7w_2 = 0 + 0 \\ & 2(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) + 7(w_1 + w_2) = 0 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Wir zeigen, dass auch das Multiplizieren eines Lösungsvektors mit einem Skalar α immer noch die Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned}
&2x + 4y + 3z + 7w = 0 \\
&\alpha(2x + 4y + 3z + 7w) = \alpha 0 \\
&2(\alpha x) + 4(\alpha y) + 3(\alpha z) + 7(\alpha w) = 0
\end{aligned}$$

b) 1. Der Nullvektor von $\mathcal{V}$ ist die konstante Funktion $\theta(x) = 0$. Weil auch gilt, dass $\theta(x) = 0 = \theta(x-1)$ für $\forall x \in [0,1]$, ist $\theta \in \mathcal{U}$.

2. Für beliebige $e, g \in \mathcal{U}$ wollen zeigen, dass auch $h := e + g \in \mathcal{U}$:

$$h(x) = e(x) + g(x) = e(1-x) + g(1-x) = h(1-x) \quad \forall x \in [0,1]$$

3. Sei $\alpha \in \mathbb{E}$ und $f \in \mathcal{U}$. Dann gilt dass, $f(x) = f(1-x)$ und somit auch $\alpha f(x) = \alpha f(1-x)$.

3. V ist ein Vektorraum wenn für alle $f, g \in V$ folgendes gilt

1. Abgeschlossenheit bezüglich Addition $f \oplus g \in V$:
Da $f \oplus g$ für ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, müssen wir noch zeigen, dass $(f \oplus g)(x) > 0$ für alle x. Mit $(f \oplus g)(x) = f(x)g(x)$ und $f(x) > 0, g(x) > 0$ gilt auch $(f \oplus g)(x) > 0$.
2. Abgeschlossenheit bezüglich skalarer Multiplikation $c \odot f \in V$:
Da $(c \odot f)(x) = f(x)^c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist und $f(x) > 0$, gilt auch dass $(c \odot f)(x) > 0$.
3. $f \oplus g = g \oplus f$
Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie für all $x \in \mathbb{R}$ gleich sind. Somit müssen wir zeigen, dass $(f \oplus g)(x) = (g \oplus f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \oplus g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g \oplus f)(x).$$

4. $f \oplus (g \oplus h) = (f \oplus g) \oplus h$
Analog zu vorher, zeigen wir:

$$(f \oplus (g \oplus h))(x) = f(x)(g \oplus h)(x) = f(x)g(x)h(x) = (f \oplus g)(x)h(x) = ((f \oplus g) \oplus h)(x).$$

5. Es gibt ein ausgezeichnetes Element $o \in V$, so dass $f \oplus o = f = o \oplus f$
Hier suchen wir den Nullvektor in V und somit eine Funktion $o(x) > 0$. Wir nehmen $o(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f \oplus o)(x) = f(x)o(x) = f(x) = (o \oplus f)(x).$$

6. Es gibt ein eindeutiges $-f \in V$, so dass $f \oplus (-f) = o = f \oplus (-f)$ gilt
Wir nehmen $(-f)(x) = f(x)^{-1}$. Es ist einfach zu zeigen, dass $f(x)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und positiv ist. Damit können wir nun zeigen:

$$\begin{aligned}
(f \oplus (-f))(x) &= f(x)(-f)(x) = f(x)f(x)^{-1} = 1 \\
&= z(x) = (-f)(x)f(x) = ((-f) \oplus f)(x).
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

7. $c \odot (f \oplus g) = (c \odot f) \oplus (c \odot g)$ mit $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(c \odot (f \oplus g))(x) &= (f \oplus g)(x)^c = (f(x)g(x))^c = f(x)^c g(x)^c \\ &= (c \odot f)(x)(c \odot g)(x) = ((c \odot f) \oplus (c \odot g))(x).\end{aligned}$$

8. $(c + d) \odot f = (c \odot f) \oplus (d \odot f)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}((c + d) \odot f)(x) &= f(x)^{c+d} = f(x)^c f(x)^d \\ = (c \odot f)(x)(d \odot f)(x) &= ((c \odot f) \oplus (d \odot f))(x).\end{aligned}$$

9. $(cd) \odot f = c \odot (d \odot f)$

$$((cd) \odot f)(x) = f(x)^{cd} = (f(x)^d)^c = ((d \odot f)(x))^c = (c \odot (d \odot f))(x).$$

10. $1 \odot f = f$

$$(1 \odot f)(x) = f(x)^1 = f(x).$$

4. Bonusaufgabe

a) 1. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist Teil des Untervektorraums W wenn er sich als eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2$ darstellen lässt. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2\end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

eine Lösung besitzt. Gausselimination liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right).$$

Es existiert keine Lösung des Gleichungssystems und damit ist $\mathbf{b}$ keine Element des Vektorraums W.

2. Anhand der Gausselimination aus dem vorherigen Aufgabenteil, lässt sich der Rang der Matrix zu 2 bestimmen. Damit sind die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2$ linear abhängig und können dementsprechend auch keine Basis bilden.

b) 1. Um zu zeigen, dass U ein Untervektorraum von V ist, müssen wir die Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition und skalaren Multiplikation zeigen. Seien $f, g \in U$, dann gilt:

$$(f + g)(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = f(x) + g(x) = (f + g)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $f + g \in U$ und die Vektoraddition ist abgeschlossen. Ferner gilt für einen Skalar $c \in \mathbb{R}$

$$(c * f)(x + 2\pi) = c * f(x + 2\pi) = c * f(x) = (c * f)(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Menge U ist also auch abeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation und U damit ein Untervektorraum von V.

Siehe nächstes Blatt!

2. Um zu zeigen, dass Q_1 und Q_2 identisch sind, reicht es aus zu zeigen, dass sich die Elemente eines der Erzeugendsysteme als Linearkombinationen der Elemente des anderen Erzeugendsystems darstellen lassen. Aus der Eulerformel folgt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Damit folgt $\sin^2 = \mathbf{1} - \cos^2$ und $\cos^2 = \mathbf{1} - \sin^2$. Die konstanten Funktionen sind trivialerweise Vielfache voneinander. Es gilt also für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 \in Q_1 \text{ und } \mathbf{2} \in Q_1 \Rightarrow a\cos^2 + b\,\mathbf{2} \in Q_1 \Rightarrow Q_2 \subseteq Q_1$$
$$\sin^2 \in Q_2 \text{ und } \mathbf{1} \in Q_2 \Rightarrow a\sin^2 + b\,\mathbf{1} \in Q_2 \Rightarrow Q_1 \subseteq Q_2$$

Insgesamt folgt also $Q_1 = Q_2$.

5. **a)**
```
function [L, R, P] = mylrp( A )
% MYLRP   LR-factorization of A
% Computes lower matrix L, upper matrix R and
% permutation matrix P such that
% P*A = L*R.

        n = size(A, 1);
        P = eye(n);
        L = zeros(n);

        % Transform A into upper triangular form
        for k = 1:n
                % Zero column?
                if all(abs(A(k:n, k)) < eps)
                        % A is singular; return "false"
                        L = false;
                        R = false;
                        return;
                end

                % Find pivot element
                % Index of pivot element
                [pivot, pivotInd] = max(abs(A(k:n, k)));
                pivotInd = pivotInd + (k-1);

                % Pivot rows of A and P
                A([k, pivotInd], :) = A([pivotInd, k], :);
                P([k, pivotInd], :) = P([pivotInd, k], :);
                L([k, pivotInd], :) = L([pivotInd, k], :);
```

Bitte wenden!

```
                % Set the k-th column of L
                L(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k,k);

                % Eliminate rest of column
                for l = k+1:n
                        A(l,:) = A(l,:) - A(k,:)/A(k,k)*A(l,k);
                end
        end

        % Add the diagonal elements of L
        L = L + eye(n);

        % R is now the row-reduced form of A
        R = A;
end
```

b)

```
>> A = [0, 1, 2; 1, 0, 3; 4, -3, 8];
>> [L,R,P] = lrp(A)

L =

1.0000         0         0
0    1.0000         0
0.2500    0.7500    1.0000


R =

4.0000   -3.0000    8.0000
0    1.0000    2.0000
0         0   -0.5000


P =

0     0     1
1     0     0
0     1     0
```

Siehe nächstes Blatt!

6. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Seien U_1, U_2 Untervektorräume des Vektorraumes V. Welche der folgenden Teilmengen von V sind auch Untervektorräume?

$\surd$ (a) $U_1 \cap U_2$

Die Menge $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V:

- Der Nullvektor $0 \in U_1 \cap U_2$ da $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$;
- Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in K$, dann ist $u + \lambda v$ in $U_1 \cap U_2$ da es in U_1 und auch in U_2 ist.

(b) $U_1 \cup U_2$

Die Menge $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von V, nehmen Sie zum Beispiel zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ die durch $(0,0)$ gehen, dann ist $U_1 \cup U_2$ nicht geschlossen gegenüber der Addition.

(c) $U_1 \setminus U_2 := \{u \in U_1 | u \notin U_2\}$

$U_1 \setminus U_2$ ist nie ein Unterraum von V, da die 0 fehlt.

(d) $\varnothing$

Die leere Menge enthält kein neutrales Element und ist somit kein Vektorraum, also auch kein Untervektorraum

$\surd$ (e) $\{0\}$

Die Menge $\{0\}$ bildet einen in V enthaltenen Vektorraum und ist somit ein Untervektorraum.

$\surd$ (f) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

Die Menge $U_1 + U_2$ ist ein Unterraum von V:

- Wir haben $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$;
- Seien $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2 \in U_1 + U_2$ (mit $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$) und $\lambda \in K$, dann ist

  $$u + \lambda v = u_1 + u_2 + \lambda(v_1 + v_2) = (u_1 + \lambda v_1) + (u_2 + \lambda v_2) \in U_1 + U_2$$

  da $u_1 + \lambda v_1 \in U_1$ und $u_2 + \lambda v_2 \in U_2$.

Bitte wenden!

2. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix}7\\6\\5\\4\end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen definiert eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(a)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^4$ hat Dimension 4, aber diese Menge hat 5 Elemente.

(b)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Der Nullvektor ist linear abhängig von allen anderen Vektoren.

$\surd$ (c)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Diesen 4 Vektoren sind linear unabhängigen.

(d)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\3\\5\end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^4$ hat Dimension 4, aber diese Menge hat 3 Elemente.

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^\infty$?

$\surd$ (a) Die Menge aller Folgen, die nur endlich viele nicht verschwindenden Folgenglieder haben, d.h.

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_k \in \mathbb{R} \text{ und es existiert ein } N \text{ sodass } x_j = 0 \text{ für alle } j \geq N\}.$$

(b) Die Menge aller monoton fallenden Folgen:

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_j \in \mathbb{R} \text{ und } x_j \geq x_{j+1}\}.$$

$\surd$ (c) Die Menge aller arithmetischen Folgen:

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_j \in \mathbb{R} \text{ und } x_{j+1} - x_j \text{ ist identisch für alle } j \in \mathbb{N}\}.$$

(d) Die Menge aller geometrischen Folgen:

$$\{(a, ka, k^2a, \ldots) : a \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}\}.$$

4. Welche der folgenden Aussagen über den Kern einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ sind im Allgemeinen korrekt? Geben Sie Gegenbeispiele für die falschen Aussagen.

$\surd$ (a) $\ker\mathbf{A} = \ker(2\mathbf{A})$

(b) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A}^2)$

(c) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A} + I)$

(d) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A}^T)$

5. Welche der folgenden Aussagen über das Bild einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist im Allgemeinen korrekt? Geben Sie Gegenbeispiele für die falschen Aussagen.

$\surd$ (a) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(2\mathbf{A})$

(b) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A}^2)$

(c) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A} + I)$

(d) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A}^T)$