D-INFK
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2020

Serie 5

1. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen, ob die Elemente im Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 1}$, $\mathbb{R}^{1\times 4}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ and $\mathbb{R}^{2\times 1}$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind.

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}^{\top}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2. Untervektorräume

a) Sei $\mathcal{S}$ ein Teilmenge von $\mathbb{R}^4$, bestehend aus den Vektoren $\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix}$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$2x + 4y + 3z + 7w = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Sei $\mathcal{V}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktion über $\mathbb{R}$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{V} \mid f(x) = f(1 - x) \text{ für } x \in [0, 1]\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{V}$ ist.

3. Sei V die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und sei $f, g \in V$. Dann gilt, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren jetzt die Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ für V wie folgend:

$$(f \oplus g)(x) = f(x)g(x)$$
$$(c \odot f)(x) = f(x)^c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum ist.

Hinweis: Es lohnt sich eine genaue Notation zu benutzen. f und g sind Funktionen, während $f(x)$ oder $g(x)$ den Wert der Auswertung der Funktion an der Stelle x darstellt. Zum Beispiel macht $f(x) \oplus g(x)$ keinen Sinn, da $\oplus$ und $\odot$ nur für die Elemente in der Menge V definiert sind und nicht für reelle Werte wie $f(x)$ oder $g(x)$.

Bitte wenden!

4. Bonusaufgabe

a) Gegeben ist der Untervektorraum $W = \operatorname{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ und der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\9\\-2\\3\end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie ihre Antworten.

1. Ist $\mathbf{b}$ ein Element von W?
2. Ist $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ eine Basis von W?

b) Sei V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen über $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge der 2π-periodischen Funktionen

$$U = \{f \in V : f(x + 2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

2. Zeigen Sie, dass folgenden Untervektorräume identisch sind:

$$Q_1 = \operatorname{span}\left\{\sin^2, \mathbf{1}\right\} \text{ und } Q_2 = \operatorname{span}\left\{\cos^2, \mathbf{2}\right\},$$

wobei $\mathbf{1}$ (bzw. $\mathbf{2}$) die konstanten Funktionen gleich 1 (bzw. 2) bezeichnen.

5. MATLAB-Aufgabe - Pivotisierte LR-Zerlegung

a) Erweitern Sie die LR-Zerlegung der Übungsserie 5 zu einer MATLAB-Funktion

```
[L, R, P] = mylrp(A)
```

zur Berechnung der LR-Zerlegung mit Zeilentauschen $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$. Ihre Funktion soll zusätzlich zu $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ auch die Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ zurückgeben. Wählen Sie in jedem Schritt das Pivotelement mit maximalem Absolutbetrag.

b) Testen Sie Ihre Implementierung mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 0 & 3\\4 & -3 & 8\end{pmatrix}$$

und geben Sie die Matrizen $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ und $\mathbf{P}$ aus.

Siehe nächstes Blatt!

6. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Seien U_1, U_2 Untervektorräume des Vektorraumes V. Welche der folgenden Teilmengen von V sind auch Untervektorräume?

(a) $U_1 \cap U_2$

(b) $U_1 \cup U_2$

(c) $U_1 \setminus U_2 := \{u \in U_1 | u \notin U_2\}$

(d) $\varnothing$

(e) $\{0\}$

(f) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

Bitte wenden!

2. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen definiert eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(a)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d)

$$\left\{ \mathbf{x_1}, \quad \mathbf{x_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^\infty$?

(a) Die Menge aller Folgen, die nur endlich viele nicht verschwindenden Folgenglieder haben, d.h.

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_k \in \mathbb{R} \text{ und es existiert ein } N \text{ sodass } x_j = 0 \text{ für alle } j \geq N\}.$$

(b) Die Menge aller monoton fallenden Folgen:

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_j \in \mathbb{R} \text{ und } x_j \geq x_{j+1}\}.$$

(c) Die Menge aller arithmetischen Folgen:

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_j \in \mathbb{R} \text{ und } x_{j+1} - x_j \text{ ist identisch für alle } j \in \mathbb{N}\}.$$

(d) Die Menge aller geometrischen Folgen:

$$\{(a, ka, k^2a, \ldots) : a \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}\}.$$

4. Welche der folgenden Aussagen über den Kern einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ sind im Allgemeinen korrekt? Geben Sie Gegenbeispiele für die falschen Aussagen.

(a) $\ker\mathbf{A} = \ker(2\mathbf{A})$

(b) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A}^2)$

(c) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A} + I)$

(d) $\ker\mathbf{A} = \ker(\mathbf{A}^T)$

5. Welche der folgenden Aussagen über das Bild einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist im Allgemeinen korrekt? Geben Sie Gegenbeispiele für die falschen Aussagen.

(a) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(2\mathbf{A})$

(b) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A}^2)$

(c) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A} + I)$

(d) $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{im}(\mathbf{A}^T)$

Abgabe: Bis spätestens 15:00 Uhr, Freitag 30. Oktober 2020.

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`