Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

# Musterlösung 6

**1.** **a)** Die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathbf{T}$ von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_1$ lautet

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**b)** Demzufolge ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ die Inverse von $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**c)** Für die Koordinatendarstellung gilt dann $\xi_1 = \mathbf{T}^{-1}\xi_0$ mit $\xi_0 = F(\mathbf{v}_i)$ ($\mathbf{v}_i$ mit $i = 1, 2, 3$ ist bezüglich der Standardbasis gegeben). Somit erhält man die Koordinaten von $F(\mathbf{v}_i)$ in der Basis $\mathcal{B}_1$:

$$\mathbf{T}^{-1}F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^\top$$
$$\mathbf{T}^{-1}F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = (0, 2, 0)^\top$$
$$\mathbf{T}^{-1}F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = (0, 0, 3)^\top$$

**d)** Aus dem Kommutativen Diagramm aus Abbildung 5.48 im Skript folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 22 & -20 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Spalten dieser Matrix sind genau die Vectoren, die wir in Teil c) berechnet haben.

**e)** Aus der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}_1$ können wir nun ablesen, dass die Abbildung $F$ injektiv ist.

**Bitte wenden!**

**2.** 1. Sei $f_0(x) = 0$ die Nullfunktion. Es gilt $f_0(x) = 0 = -f_0(-x)$ und $f_0(x) = 0 = f_0(-x)$ und damit $f_0 \in U$ und $f_0 \in G$. Desweiteren für $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(u_1(x) + u_2(x)) = -\lambda(u_1(-x) + u_2(-x))$$

und analog für $g_1, g_2 \in G$

$$\lambda(g_1(x) + g_2(x)) = \lambda(g_1(-x) + g_2(-x))$$

2. Sei $f \in V$ eine beliebige stetige Funktion. Es gilt $f = u + g$ mit

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in U \\ g &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \in G \end{aligned}$$

Da für eine stetige Funktion $v$ aus den Bedingungen $v(x) = -v(-x)$ und $v(x) = v(-x)$ direkt folgt $v(x) = -v(x)$ haben wir $U \cap G = \{f_0\}$. Damit ist die Zerlegung $f = u + g$ eindeutig. Wäre sie es nicht, gäbe es andere Funktionen $u' \in U$ und $g' \in G$ mit $f = u' + g'$. Dann würde aber auch $u - u' + v - v' = f_0$ gelten. Daraus folgt aber $u = u'$ und $g = g'$, da $u - u' \in U$, $v - v' \in G$ und $U \cap G = \{f_0\}$.

**3.** Wir sehen, dass $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Wir drücken nun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ als lineare Kombination dieser Basisvektoren aus:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir $c_1 = x - y$ und $c_2 = y$ und

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Mit der Linearität von $L$ können wir die allgemeine Formel herleiten:

$$\begin{aligned} L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= L\left((x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (x-y)L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yL\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \\ 2x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**4. Bonusaufgabe**

**a)** Die Spalten der Basiswechselmatrix $\mathbf{T}$ enthalten Koeffizienten die die Basiselemente von $\mathcal{B}_1$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}_0$ darstellen. Es gilt damit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**b)** Die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ ist die Inverse $\mathbf{T}^{-1}$ der Matrix aus Aufgabenteil **a**). Sie lässt sich direkt konstruieren indem man versucht die Elemente von $\mathcal{B}_0$ als Linearkombinationen der Elemente von $\mathcal{B}_0$ darzustellen. Alternativ können vier Gleichungssysteme gelöst werden um die Spalten von $\mathbf{T}^{-1}$ zu bestimmen:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Einheitsmatrix. Wir können Gausselimination simultan für die vier Einheitsvektoren durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Durch Rückwärtseinsetzen der vier Spalten auf der rechten Seite ergeben sich die Spalten der Basiswechselmatrix

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**c)** Bezüglich der Basis $\mathcal{B}_0$ lauten die Koordinaten des gegebenen Elements

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ erhält man durch einen Basiswechsel

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Bitte wenden!**

**d)** Die Spalten der Abbildungsmatrix bilden die Basiselemente von $\mathcal{B}_0$ auf ihre Bilder unter der Abbildung $F$ ab. Es gilt:

$$F\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$F\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$F\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$F\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix $\mathbf{F}$ ist damit:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

**e)** Die Abbildung ist nicht injektiv, da zwei Basiselemente auf das gleiche Element (das Nullelement) abgebildet werden.

**Siehe nächstes Blatt!**

**5.** Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

**1.** Der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(a) $(0.5, 0)$

(b) $(-1, -1)$

(c) $(0, -2)$

$\surd$ (d) $(2, 0)$

(e) $(1, 1)$

Da der gegebene Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten $(-1, -1)$ hat, gilt

$$\mathbf{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher sind $(2, 0)$ die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Standardbasis.

**2.** Die Dimension des Unterraums aller reellen schiefsymmetrischen $3 \times 3$ Matrizen ist:

(a) 1

$\surd$ (b) 3

(c) 6

(d) 9

**Bitte wenden!**

**3.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - 3$$

$f$ erfüllt nicht $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 - x_2 \end{pmatrix}$$

Die Grösse $x_2^2$ ist nichtlinear.

$\surd$ (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\surd$ (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2$$

$\surd$ (f) $f : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$,

$$f(p) = p(1),$$

wobei $p(t)$ ein Polynom in $\mathcal{P}_1$ bezeichnet.

Für Polynome $p, q \in \mathcal{P}_1$ gilt es

$$f(p+q) = (p+q)(1) = p(1) + q(1) = f(p) + f(q)$$

und

$$f(\alpha p) = (\alpha p)(1) = \alpha p(1) = \alpha f(p).$$

**4.** Gegeben sind die linearen Abbildungen

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$
$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$
$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) $f_1$ ist injektiv, $f_2$ ist surjektiv, $f_3$ ist bijektiv.

(b) $f_3$ ist injektiv, $f_2$ ist surjektiv, $f_1$ ist bijektiv.

$\surd$ (c) $f_3$ ist injektiv, $f_1$ ist surjektiv, $f_2$ ist bijektiv.