Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 6

1. Gegeben sind zwei Basen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_0 = \text{Standardbasis}$$

$$\mathcal{B}_1 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \text{ mit } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und die folgende lineare Abbildung (bzgl. $\mathcal{B}_0$)

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v} \mapsto F(\mathbf{v}) = \mathbf{A}_0\mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 22 & -20 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ des Basiswechsels von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_1$ an.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ an.

c) Geben sie die Koordinaten von $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2)$ und $F(\mathbf{v}_2)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ an.

d) Geben Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}_1$ von F bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ an.

e) Ist die Abbildung F injektiv?

2. Sei V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen über $\mathbb{R}$. Ferner sei

$$U = \{f \in V : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der ungeraden und

$$G = \{f \in V : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der geraden Funktionen in V.

a) Zeigen Sie, dass U und G Untervektorräume von V sind.

b) Zeigen Sie, dass U und G komplementär zueinander sind. D.h. der Schnitt $U \cap G$ enthält nur das neutrale Element und alle Elemente von V lassen sich als Summe von Elementen aus U und G darstellen.

Bitte wenden!

3. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, so dass

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Formel für $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$

4. Bonusaufgabe
Gegeben sind zwei Basen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathcal{B}_0 = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$$
$$\mathcal{B}_1 = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right],$$

wobei $\mathcal{B}_0$ die Standardbasis ist.

a) Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_1$ an.

b) Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ an.

c) Geben Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix}10 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \in V$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ an.

d) Geben Sie für die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F : V &\to V \\ \mathbf{A} &\mapsto \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \end{aligned}$$

die Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}_0$ an.

e) Ist die Abbildung F injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Lassen Sie sich nicht dadurch verwirren, dass Elemente des Vektorraums hier Matrizen sind. Unterscheiden sie zwischen Elementen des Vektorraums ($\in \mathbb{R}^{2\times 2}$) und Abbildungsmatrizen die Elemente des Raums aufeinander abbilden ($\in \mathbb{R}^{4\times 4}$).

5. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(a) $(0.5, 0)$

(b) $(-1, -1)$

(c) $(0, -2)$

(d) $(2, 0)$

(e) $(1, 1)$

2. Die Dimension des Unterraums aller reellen schiefsymmetrischen 3×3 Matrizen ist:

(a) 1

(b) 3

(c) 6

(d) 9

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - 3$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 - x_2 \end{pmatrix}$$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2$$

(f) $f : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$,

$$f(p) = p(1),$$

wobei $p(t)$ ein Polynom in $\mathcal{P}_1$ bezeichnet.

4. Gegeben sind die linearen Abbildungen

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) f_1 ist injektiv, f_2 ist surjektiv, f_3 ist bijektiv.

(b) f_3 ist injektiv, f_2 ist surjektiv, f_1 ist bijektiv.

(c) f_3 ist injektiv, f_1 ist surjektiv, f_2 ist bijektiv.

Abgabe: Bis spätestens 15:00 Uhr, Freitag 06. November 2020.

http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/