D-INFK Lineare Algebra HS 2020
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung Serie 7

1. **a)** Wir haben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 10 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 22 & -1 \\ 0 & 10 & -22 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 22 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese Matrix hat 2 Pivotelemente, und folglich ist $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = 2$. Dann wird

$$\dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = 4 - 2 = 2.$$

$\mathbf{A}$ ist injektiv falls die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.
$\mathbf{A}$ ist surjektiv falls der $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = \mathsf{dim}\ R^4$.
$\mathbf{A}$ ist demnach weder injektiv noch surjektiv.

b) Wir bestimmen den Kern von F, in dem wir linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}$ suchen, welche $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ erfüllen. Von der Zeilenstufenform aus (1) sehen wir, dass wir $x_4 = s$ und $x_3 = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ frei wählen können. Damit ist $\dim \mathrm{Ker}\, F = 2$. Wir können nun eine Basis von F wie folgend finden:

$$x_2 = \frac{-22x_3 + x_4}{-10} = \frac{22t - s}{10}$$
$$x_1 = 2x_2 - 4x_3 = \frac{22t - s}{5} - 4t = \frac{2t - s}{5}$$

und

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2/5 \\ 22/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weil Spalten 1 und 2 linear unabhängig sind (sie haben Pivotelemente in $\mathbf{A}$), sind diese Spalten Basiselemente für $\mathrm{Bild}\,\mathbf{A}$:

$$\mathrm{Bild}\,\mathbf{A} = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bitte wenden!

2. **a)** Polynome zweiten Grades lassen sich darstellen als $p(x) = ax^2 + bx + c$. Weiter gilt $p'(x) = 2ax + b$. Gesucht sind Koeffizienten a, b, c, so dass die Bedingungen $p(2) = 0$ und $p'(2) = 0$ gelten. Die beiden Bedingungen sind linear. Die gesuchten Koeffizienten sind die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss Elimination liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Dies ergibt die Lösungsmenge $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Ersetzten der rechten Seite der Gleichung ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Eine Lösung ist $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -2 & 0 \end{pmatrix}^\top$.

c) Die Lösungsmenge ergibt sich als Summe der speziellen Lösung aus b) und dem Kern aus a).

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Kern von $\mathbf{A}$:
Die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind Vielfache voneinander, also sind sie linear abhängig und $\mathbf{A}$ hat Rang 1. Somit hat das Bild von $\mathbf{A}$ Dimension 1. Aus dem Dimensionssatz für Matrizen folgt, dass der Kern von $\mathbf{A}$ Dimension 3 haben muss. Wir bestimmen den Kern von $\mathbf{A}$, in dem wir drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}$ suchen, welche $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erfüllen.

Man bringt $\mathbf{A}$ in Zeilenstufenform $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bild von $\mathbf{A}$:
Wie vorher bemerkt, sind die Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig, und das Bild hat deswegen Dimension 1:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Kern von $\mathbf{A}^\mathsf{T}$:
Wir bemerken wieder, dass die Spalten von $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ linear abhängig sind und das Bild der Matrix deswegen Dimension 1 hat. Aus dem Dimensionssatz für Matrizen folgt, dass $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = 1$. Man bringt $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ in Zeilenstufenform:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir finden

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bild von $\mathbf{A}^\mathsf{T}$:
Wie vorher bemerkt, hat das Bild der Matrix Dimension 1, da die Spaltenvektoren linear abhängig sind:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Kern von $\mathbf{B}$:
Die Zeilenstufenform von $\mathbf{B}$ ist:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$\mathbf{B}$ hat Rang 2. $\mathrm{Ker}(\mathbf{B})$ hat Dimension 1:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{B}) = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Bild von $\mathbf{B}$:
Die 1. und die 3. Spalte von $\mathbf{B}$ sind linear abhängig. Also lässt sich das Bild von $\mathbf{B}$ mit der 1. und 2. Spalte beschreiben,

$$\mathrm{Im}(\mathbf{B}) = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Kern von $\mathbf{B}^\mathsf{T}$:
Man bringt $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ in Zeilenstufenform:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Spalten von $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ linear abhängig sind und da $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{B}^\mathsf{T}) = 2$, muss $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{B}^\mathsf{T}) = 1$ sein. Wir wählen zum Beispiel

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Bild von $\mathbf{B}^\mathsf{T}$:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Bonusaufgabe

a) Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ lässt sich als

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & -5 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -5 & -7 & 1 \\ -9 & 18 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

schreiben, wobei wir die Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathbf{A}$ verwendet haben.

b) Wie im Kapitel 5.3 des Skripts gezeigt, sind alle benötigten Informationen in der Zeilenstufenform $\mathbf{R}$ einer Matrix direkt ablesbar.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & -5 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -5 & -7 & 1 \\ -9 & 18 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Tatsächlich lassen sich alle Größen direkt an der Matrix ablesen: Die Dimension des Definitionsraums ist $n = 5$ und der Rang der Abbildung ist $r = 4$. Somit ist die Dimension des Bildes $\mathsf{dim}\ \operatorname{Im}\mathbf{A} = 4$. Da wir einen freie Variable haben, ist die Dimension des Kernes $\mathsf{dim}\ \mathsf{ker}\ \mathbf{A} = 1$. Wir können mit der Dimensionsformel trotzdem den Rang der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmen

$$n - \mathsf{dim}\ \mathsf{ker}\ \mathbf{A} = r = 5 - 1 = 4.$$

c) Als Basis für das Bild $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ nehmen wir die Pivotkolonnen (in ihrer ursprünglichen Form), also die ersten vier Kolonnen von $\mathbf{A}$

$$\operatorname{Im}\mathbf{A} = \mathsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Pivotkolonnen sind linear unabhängig und spannen somit den vier-dimensionalen Bildraum auf. Allgemeiner spannen beliebige vier linear unabhängige Kolonnen von $\mathbf{A}$ den Bildraum auf.

Man beachte auch, dass Kolonnen von $\mathbf{A}$ genau dann linear abhängig (oder unabhängig) sind, wenn dasselbe für die entsprechenden Kolonnen von $\mathbf{R}$ gilt.

Eine einfache Basis des Kerns erhalten wir dadurch, dass wir die freie Variable x_5 auf 1 setzen. Dann werden die restlichen Variablen x_1, x_2, x_3 und x_4 so bestimmt, dass wir eine Lösung des homogenen Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erhalten, d.h. ein Element des Kerns.

Für $x_5 = 1$ erhalten wir:

$$x_4 = 1 \qquad x_3 = 0 \qquad x_2 = -1 \qquad x_1 = -2$$

Somit erhalten wir für den Kern $\operatorname{ker} \mathbf{A}$ die Basis

$$\operatorname{ker} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Mit Satz 5.19 aus dem Skript wissen wir, dass die allgemeine Lösung als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems geschrieben werden kann. Eine spezielle Lösung für das inhomogene System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lässt sich finden, indem auch die rechte Seite bei der Umformung in Zeilenstufenform berücksichtigt wird. Man erhält

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -3 & -2 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

und somit eine spezielle Lösung $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 2, -2, 0)^\top$. Die allgemeine Lösung lautet

$$\mathcal{L}_\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. **a)** Da beide Vektoren in der Ebene E liegen, müssen diese auch die Gleichung $-x - 2y = 3z$ erfüllen. Damit wählen wir für x, y zwei linear unabhängige Paare $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ und erhalten damit zwei linear unabhängige Vektoren in der Ebene.

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}3\\0\\\frac{-3-2\cdot 0}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}0\\3\\\frac{-0-2\cdot 3}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor $\mathbf{n}$ kann direkt von den Koeffizienten der Gleichung für die Ebene abgelesen werden und ist $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

b) Wir haben mit $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ zwei linear unabhängige Vektoren die zu $\mathbf{n}$ orthogonal sind:

$$\langle \mathbf{b_1}, \mathbf{n} \rangle = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 0$$
$$\langle \mathbf{b_2}, \mathbf{n} \rangle = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

und somit auch linear unabhängig. Da sie ganz $\mathbb{R}^3$ aufspannen, bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

c) Wir betrachten nun, was die Spiegelung an der Ebene mit den drei Basisvektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{n}$ genau macht. Wir sehen, dass $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ gerade auf sich selbst abgebildet werden, da sie in der Ebene liegen und dass der Normalenvektor invertiert wird:

$$[F(\mathbf{b_1})]_\mathcal{B} = [\mathbf{b_1}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$[F(\mathbf{b_2})]_\mathcal{B} = [\mathbf{b_2}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$[F(\mathbf{n})]_\mathcal{B} = [-\mathbf{n}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die folgende einfache Abbildungsmatrtix für F in der Basis $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

d) Die Abbildungsmatrix F im Bezug zur Standardbasis ist geben durch $\mathbf{F}_\mathcal{E} = \mathbf{T}\mathbf{F}_\mathcal{B}\mathbf{T}^{-\mathbf{1}}$, wobei $\mathbf{T}$ die Koordinatentransformation zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}$ ist:

$$\mathbf{T} = \text{Mat}(\text{id}, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} [\mathbf{b_1}]_\mathcal{E} & [\mathbf{b_2}]_\mathcal{E} & [\mathbf{n}]_\mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

e) Die Spiegelung an einer Ebene kann mit folgender Abbildung beschrieben werden:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\langle \mathbf{n},\, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{n},\, \mathbf{n} \rangle}\mathbf{n}.$$

Dabei nutzen wir die Projektion des Vektors $\mathbf{x}$ auf die Normale $\mathbf{n}$ der Ebene E und ziehen diese von $\mathbf{x}$ zwei mal ab. Das ergibt einen an der Ebene gespiegelten neuen Vektor.

7. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

(a) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sind linear unabhängig, wenn F surjektiv ist

$\surd$ (b) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sind linear unabhängig, wenn F injektiv ist

$\surd$ (c) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F surjektiv ist

(d) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F injektiv ist

$\surd$ (e) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden eine Basis genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

$\surd$ (a) $\dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = n$

(b) $\dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = 1$

$\surd$ (c) $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = 0$

(d) $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = 1$

Der Kern von $\mathbf{A}$ ist genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, gilt $\dim \operatorname{Ker}(A) = 0$. Weiter gilt

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) + \dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = n.$$

Daher gilt $\dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = n$.

Bitte wenden!

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die wie folgt definierte Abbildung $f : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$:

$$[f(p)]\,(t) = p(t+2) - p(t) \quad \text{für jede } t \in \mathbb{R} \text{ und } p \in \mathcal{P}_n.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) f ist eine lineare Abbildung.

Seien $p, q \in \mathcal{P}_n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[f(\alpha p + q)]\,(t) = [\alpha p + q]\,(t+2) - [\alpha p + q]\,(t) = \alpha p(t+2) + q(t+2) - \alpha p(t) - q(t) = \alpha\,[p(t+2) - p(t)] + [q(t+2) - q(t)] = \alpha\,[f(p)]\,(t) + [f(q)]\,(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\alpha p + q) = \alpha f(p) + f(q)$.

(b) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

√ (c) $\operatorname{Ker} f = \mathcal{P}_0$.

(d) $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}_n$.

√ (e) $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}_{n-1}$.

Sei $p \in \mathcal{P}_0$, dann gibt es ein $a_0 \in \mathbb{R}$, so dass $p(t) = a_0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[f(p)]\,(t) = a_0 - a_0 = 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. $f(p) = 0$. Deshalb gilt $\mathcal{P}_0 \subset \operatorname{Ker} f$.

Sei $p \in \mathcal{P}_n$, dann gibt es $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass $p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[f(p)]\,(t) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left((t+2)^k - t^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} 2^{k-l} t^l \right) - t^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} 2^{k-l} t^k = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{k=l+1}^{n} a_k \binom{k}{l} 2^{k-l} \right) t^l = \sum_{l=0}^{n-1} b_l t^l
\end{aligned}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{k=l+1}^{n} a_k \binom{k}{l}$ für $0 \leq l \leq n-1$. Deshalb gilt $f(p) \in \mathcal{P}_{n-1}$ für jedes $p \in \mathcal{P}_n$, d.h. $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{P}_{n-1}$. Des Weiteren gilt $b_{n-1} = \binom{n}{n-1} = n \neq 0$ für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit $a_n = 1$, d.h. gibt es $p \in \mathcal{P}_n$, so dass $f(p) \in \mathcal{P}_{n-1}$, aber $f(p) \notin \mathcal{P}_{n-2}$. Deshalb schliesst man, dass $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}_{n-1}$ gilt.

Folglich gilt $\dim \operatorname{Im} f = n$ und $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathcal{P}_n - \dim \operatorname{Im} f = n + 1 - n = 1$. Weil $\dim \mathcal{P}_0 = 1$ und $\mathcal{P}_0 \subset \operatorname{Ker} f$ gelten und die beide Mengen lineare Unterräume von $\mathcal{P}_n$ sind, schliesst man, dass $\operatorname{Ker} f = \mathcal{P}_0$.

(f) Für jedes $p \in \mathcal{P}_n$ gilt $\underbrace{(f \circ f \cdots \circ f)}_{n \text{ mal}}(p) = 0$.

Wie oben zeigt man, dass $f(\mathcal{P}_k) = \mathcal{P}_{k-1}$ gilt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gilt $f^n(p) \in \mathcal{P}_0$ und $f^{n+1}(p) = 0$ für jedes $p \in \mathcal{P}_n$.

Siehe nächstes Blatt!

(g) Sei $p \in \mathcal{P}_n$. Für das Polynom $q = f(p)$ gilt $q(0) = 0$.

Wir betrachten das Polynom p durch $p(t) = t$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiert. Dann gelten $p \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_n$ und $q(t) = [f(p)]\,(t) = 2 \neq 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

4. Wie lautet der Rang der komplexen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1-i \\ 2 & -2i & -1+2i \end{pmatrix} ?$$

(a) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 0$

(b) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 1$

√ (c) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 2$

(d) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 3$

5. Wie lautet der Rang der komplexen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2i & 1-i \\ -2 & 1+i \\ -2+2i & 2 \end{pmatrix} ?$$

(a) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 0$

√ (b) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 1$

(c) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 2$

(d) $\text{Rang}\,\mathbf{A} = 3$