D-INFK Lineare Algebra HS 2020
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 7

1. Wir definieren die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ als

$$F(x) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \text{wobei} \qquad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 10 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Kern} \mathbf{F}$ und $\operatorname{Rang} \mathbf{F}$. Ist $\mathbf{F}$ injektiv oder surjektiv?

b) Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern} \mathbf{F}$ und $\operatorname{Bild} \mathbf{F}$.

2. **a)** Bestimmen Sie die Menge der Polynome zweiten Grades mit den Eigenschaften $p(2) = 0$ und $p'(2) = 0$.

b) Bestimmen Sie nun ein Polynom mit den Eigenschaften $p(2) = 1$ und $p'(2) = 3$.

c) Verwenden Sie die Lösungen von a) und b) um die Menge aller Polynome mit den Eigenschaften $p(2) = 1$ und $p'(2) = 3$ zu bestimmen.

3. Gegeben sind die folgenden Matrizen zweier linearer Abbildungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basen für das Bild, den Kern und den Zeilenraum von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

4. Bonusaufgabe
Wir betrachten nun die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, die durch

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} x_1 + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} x_5.$$

definiert ist.

Bitte wenden!

a) Wie lässt sich diese Funktion mit Hilfe einer Matrixmultiplikation schreiben?

b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns. Verwenden Sie die Dimensionsformel um den Rang der Matrix aus **a)** zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ wobei die Matrix $\mathbf{A}$ die lineare Abbildung beschreibt ($\mathbf{A}$ kann von der Lösung der ersten Teilaufgabe abgelesen werden) und $\mathbf{b} = (-9, -11, 1, 9)^\top$.

5. Eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0 \right\}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung der Spiegelung eines Vektors an dieser Ebene.

a) Finden Sie zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ in dieser Ebene und einen Normalenvektor $\mathbf{n}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{n}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Finden Sie die Abbildungsmatrix für F in Bezug zur Basis $\mathcal{B}$.

d) Beschreiben Sie den Weg zur Berechnung der Abbildungsmatrix für F in Bezug zur Standartbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$. Sie müssen die Matrix nicht numerisch berechnen.

e) Der Projektionsoperator

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$$

projiziert Vektoren $\mathbf{x}$ auf den Vektor $\mathbf{u}$. Überlegen Sie sich, wie die Abbildung F im Bezug zur Standartbasis $\mathcal{E}$ direkt mit Hilfe des Projektionsoperators formuliert werden kann.

6. MATLAB-Aufgabe
Sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In dieser Aufgabe wollen wir ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ finden, das g in n Knoten $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ interpoliert:

$$p(t_i) = g(t_i) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

a) Sei $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ in der Monombasis dargestellt: $p(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}$. Formulieren Sie die n Bedingungen (1) als lineares Gleichungssystem mit der (gesuchten) Lösung $a = (a_1, \ldots, a_n)^\top$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Implementieren Sie eine Funktion

```
function a = interpolate(g, t),
```

die den Lösungsvektor a des obigen Gleichungssystems mittels des MATLAB-Operator $\backslash$ bestimmt.
Hinweis: Die Funktion g wird dabei als Funktionenhandle übergeben, man ruft die Funktion also z.B. mittels `a=interpolate(@sqrt, t)` auf. Wenn Sie nun innerhalb der Funktion `interpolate` die Variable `g` auswerten, z.B. `g(5)`, ist dies genauso als hätten Sie direkt `sqrt(5)` geschrieben. Mit dieser Technik können Sie Ihre Implementierung für verschiedene Funktionen g testen.

c) Sei $g(t) = \sin(2\pi t)$, $n = 5$ und $t_i = \frac{i-1}{4}$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Geben Sie den Rückgabewert a des Befehls `interpolate(g,t)` aus. Plotten Sie ausserdem g und das zu a gehörige Polynom.

Hinweis: Die dazugehörigen Befehle sind

```
>> t = linspace(0, 1, 5);
>> g = @(t) sin(2*pi*t);
>> a = interpolate(g, t)
```

Bitte wenden!

7. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

(a) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sind linear unabhängig, wenn F surjektiv ist

(b) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sind linear unabhängig, wenn F injektiv ist

(c) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F surjektiv ist

(d) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F injektiv ist

(e) $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ bilden eine Basis genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

(a) $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) = n$

(b) $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) = 1$

(c) $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = 0$

(d) $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = 1$

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die wie folgt definierte Abbildung $f : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$:

$$[f(p)]\,(t) = p(t+2) - p(t) \quad \text{für jede } t \in \mathbb{R} \text{ und } p \in \mathcal{P}_n.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) f ist eine lineare Abbildung.

(b) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(c) $\operatorname{Ker} f = \mathcal{P}_0$.

(d) $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}_n$.

(e) $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}_{n-1}$.

(f) Für jedes $p \in \mathcal{P}_n$ gilt $\underbrace{(f \circ f \cdots \circ f)}_{n \text{ mal}}(p) = 0$.

(g) Sei $p \in \mathcal{P}_n$. Für das Polynom $q = f(p)$ gilt $q(0) = 0$.

4. Wie lautet der Rang der komplexen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1-i \\ 2 & -2i & -1+2i \end{pmatrix} ?$$

(a) $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = 0$

(b) $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = 1$

(c) $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = 2$

(d) $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = 3$

5. Wie lautet der Rang der komplexen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2i & 1-i \\ -2 & 1+i \\ -2+2i & 2 \end{pmatrix}?$$

(a) Rang $\mathbf{A} = 0$

(b) Rang $\mathbf{A} = 1$

(c) Rang $\mathbf{A} = 2$

(d) Rang $\mathbf{A} = 3$

Abgabe: Bis spätestens 15:00 Uhr, Freitag 13. November 2020.

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`