Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 8

1. a)

$$\begin{aligned}\mathbf{LR} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2} & 6\\ 4 & 2 & 4\\ 3 & -\frac{1}{2} & -5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & -2 & -8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b) Wir lösen zuerst $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$ und danach $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$.

$$\mathbf{PAx} = (\mathbf{LR})\mathbf{x} = \mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}.$$

- $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{c} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

somit $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 1\end{pmatrix}^\top$.

- $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

somit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 5 & -1\end{pmatrix}^\top$.

2. **a)** Man sieht sofort, dass $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) Die Transformationsmatrizen des Basiswechsels $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$ von $\mathcal{B}_e$ nach $\mathcal{B}_1$ bzw. von $\mathcal{B}_e$ nach $\mathcal{B}_2$ lauten

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Koordinatendarstellung gilt dann $\xi_i = \mathbf{T}_i^{-1}\xi_e$ für $i = 1, 2$ mit $\xi_e = \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ ist bezüglich der Standardbasis gegeben). Somit erhalten wir aus

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{v} = (\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 3)^\top \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{v} = (-1,\ -1,\ 3)^\top.$$

c) Aus dem Kommutativen Diagramm aus Abbildung 5.48 im Skript folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta - \sin\vartheta & -\cos\vartheta - \sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta + \cos\vartheta & \cos\vartheta - \sin\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta & -2\cos\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta + \sin\vartheta & \cos\vartheta - \sin\vartheta & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit

$$\mathbf{B}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Ausserdem ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

d) Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ haben wir

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{x})\| &= \left((x_1 \cos\vartheta - x_2 \sin\vartheta)^2 + (x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta)^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(x_1^2 \cos^2\vartheta - 2x_1x_2 \cos\vartheta \sin\vartheta + x_2^2 \sin^2\vartheta + x_1^2 \sin^2\vartheta\right. \\
&\quad \left. + 2x_1x_2 \cos\vartheta \sin\vartheta + x_2^2 \cos^2\vartheta + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(x_1^2 \cos^2\vartheta + x_1^2 \sin^2\vartheta + x_2^2 \cos^2\vartheta + x_2^2 \sin^2\vartheta + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|
\end{aligned}$$

und somit bleibt die Länge wie erwartet unverändert. Eine solche Abbildung heisst *längentreu*.

Bitte wenden!

3. **a)** Für V über $\mathbb{R}$ stimmt die Aussage nicht, da zum Beispiel mit $V = \mathbb{R}^2$ für $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}, F(\mathbf{v}) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -x_1 x_2 + x_1 x_2 = 0$ ist (F ist eine Drehung um $90°$).

b) Für V über $\mathbb{C}$ stimmt es. Zu zeigen ist:

$$\langle v, F(v) \rangle = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad F(v) = \mathbf{o} \text{ über } \mathbb{C}$$

Wir wissen, dass durch die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition eines Vektorraums gilt, dass wenn $x, y \in V$ auch $x + y \in V$. Damit können wir unser Skalarprodukt wie folgend erweitern:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, F(v) \rangle \\ &= \langle x + y, F(x + y) \rangle \\ &= \langle x + y, F(x) + F(y) \rangle \qquad \text{(Linearität von } F\text{)} \\ &= \langle x, F(x) \rangle + \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle + \langle y, F(y) \rangle \\ &= 0 + \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle + 0 \\ &= \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle . \end{aligned}$$

Jetzt konstruieren wir davon zwei verschieden Versionen mit $y := v$ und $y := iv$ für $v \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle \\ &= \langle x, F(v) \rangle + \langle v, F(x) \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle \\ &= \langle x, F(iv) \rangle + \langle iv, F(x) \rangle \\ &= i \langle x, F(v) \rangle + \bar{i} \langle v, F(x) \rangle \\ &= i \langle x, F(v) \rangle - i \langle v, F(x) \rangle \end{aligned}$$

$$0 = \langle x, F(v) \rangle - \langle v, F(x) \rangle \qquad \text{(Division durch } i\text{)} \tag{2}$$

Merke, die obigen Gleichungen gelten für beliebige $x, v \in V$. Als nächstes addieren wir (1) und (2):

$$0 = 2 \langle x, F(v) \rangle = \langle x, F(v) \rangle$$

Wählen wir jetzt für $x := F(v)$, erhalten wir:

$$0 = \langle F(v), F(v) \rangle \text{ für } \forall v \in V$$

Damit dies aber gilt, muss $F(v) = \mathbf{o}$ sein.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Damit wir die Gültigkeit der Parallelogrammgleichung für alle $x, y \in V$ zeigen können, entwickeln wir sie mit Hilfe der Eigenschaften eines Skalarproduktes (Satz 2.9):

$$
\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&= \langle x+y, x+y\rangle_V + \langle x-y, x-y\rangle_V \\
&= \langle x+y, x\rangle_V + \langle x+y, y\rangle_V + \langle x-y, x\rangle_V - \langle x-y, y\rangle_V \quad \text{(S1)} \\
&= \overline{\langle x, x+y\rangle_V} + \overline{\langle y, x+y\rangle_V} + \overline{\langle x, x-y\rangle_V} - \overline{\langle y, x-y\rangle_V} \quad \text{(S2)} \\
&= \overline{\langle x, x\rangle_V} + \overline{\langle x, y\rangle_V} + \overline{\langle y, x\rangle_V} + \overline{\langle y, y\rangle_V} + \overline{\langle x, x\rangle_V} - \overline{\langle x, y\rangle_V} - \overline{\langle y, x\rangle_V} + \overline{\langle y, y\rangle_V} \quad \text{(S1)} \\
&= \langle x, x\rangle_V + \overline{\langle x, y\rangle_V} + \langle x, y\rangle_V + \langle y, y\rangle_V + \langle x, x\rangle_V - \overline{\langle x, y\rangle_V} - \langle x, y\rangle_V + \langle y, y\rangle_V \quad \text{(S2)} \\
&= 2\,\langle x, x\rangle_V + 2\,\langle y, y\rangle_V \\
&= 2(\langle x, x\rangle_V + \langle y, y\rangle_V) \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}
$$

b) Mit dem Wissens, dass die Parallelogrammgleichung für beliebige x, y aus einem Vektorraum V gelten muss, können wir ein einfaches Gegenbeispiel konstruieren. Wir wählen $x, y \in \mathbb{P}_2^{[0,1]}$ als $x(t) := t^2$ und $y(t) := 1 - t^2$. Dann zeigen wir:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \quad &\neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) \\
\|t^2 + (1-t^2)\|_\infty^2 + \|t^2 - (1-t^2)\|_\infty^2 \quad &\neq 2(\|t^2\|_\infty^2 + \|1-t^2\|_\infty^2) \\
\|1\|_\infty^2 + \|2t^2 - 1)\|_\infty^2 \quad &\neq 2(\|t^2\|_\infty^2 + \|1-t^2\|_\infty^2) \\
1^2 + 1^2 \quad &\neq 2(1^2 + 1^2) \\
2 \quad &\neq 4
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

5. **a)** Die Matrix setzt sich aus den Skalarprodukten der Einheitsvektoren zusammen:

$$\mathbf{A}_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

Mithilfe der Linearität und Symmetrie lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \left\langle \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \sum_j y_j \mathbf{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \mathbf{e}_j, \sum_i x_i \mathbf{e}_i \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \sum_i x_i \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}
\end{aligned}$$

b) Die Matrix muss symmetrisch und positiv definit sein. Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$:

1.
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}$$

2.
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y})^\top = (\mathbf{A} \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

3.
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$$

c) Für zwei Spalten $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$ der Matrix $\mathbf{M}$ muss gelten

$$\mathbf{m}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{m}_j = \delta_{ij}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\mathbf{M}^\top \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{I}.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Bonusaufgabe

a) Die Parsevalsche Formel besagt, dass der Winkel zwischen zwei Vektoren durch eine Koordinatentransformation nicht verändert wird, falls wir eine orthonormale Basis haben. Somit können wir eine Koordinatentransformation von $\mathcal{P}_2^{[0,1]}$ zu $\mathbb{R}^3$ finden und den Winkel mit dem uns bekannten euklidischen Skalarprodukt berechnen.

b) Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir direkt:

$$\xi = (3 \quad \sqrt{7} \quad 0)^\top \quad \text{und} \quad \eta = (4 \quad 0 \quad 3)^\top.$$

Dann berechnen wir mit Hilfe des euklidischen Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}
\|\xi\| &= \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{7})^2} = 4 \\
\|\eta\| &= \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5 \\
\langle \xi, \eta \rangle &= 12
\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir $\angle(\xi, \eta) = \arccos\left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\eta\|\|\xi\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.1°$.

7. Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) In einem Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt kann man jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthonormalen Basis ergänzen.

(b) Mit dem Gram-Schmidt Orthogonalisierungsvefahren kann man aus einer Menge linear abhängiger Vektoren eine gleich grosse Menge linear unabhängiger Vektoren berechnen.

Das Gram-Schmidt Verfahren berechnet orthogonale Vektoren bezüglich dem verwendeten Skalarprodukt. Jedoch können nur aus linear unabhängigen Vektoren neue orthogonale Vektoren berechnet werden.

√ (c) Zu einem Vektorraum von endlicher Dimension mit Skalarprodukt gibt es eine orthonormale Basis.

Korrolar 6.7

(d) Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist die Einheitsmatrix.

Die Transformationsmatrix der Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist orthogonal, die Einheitsmatrix ist nur eine Möglichkeit.

√ (e) Die Inverse der Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist ihre Transponierte.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Stimmt es, dass das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren beliebig gross sein kann?

Für zwei Einheitsvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ besagt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\langle \mathbf{v},\, \mathbf{w}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{v},\, \mathbf{v}\rangle \cdot \langle \mathbf{w},\, \mathbf{w}\rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt, dass das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren nicht beliebig gross sein kann.

(b) Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren in diesem Vektorraum finden?

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind. Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.