Serie 8

1. Wiederholung der LR-Zerlegung

Sei $\mathbf{A}$ die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ der Matrix $\mathbf{A}$. Benutzen Sie dabei die Spaltenmaximums-Strategie zur Wahl des Pivots.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wobei

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der LR-Zerlegung von $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ durch Vor- und Rückwärtseinsetzen. Überprüfen Sie anschließend ihre Lösung.

Bitte wenden!

2. Wiederholung Basistransformation

Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)^\top \mapsto (x_1 \cos\vartheta - x_2 \sin\vartheta,\ x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta, x_3)^\top$$

für einen beliebigen Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

a) Wie lautet die Abbildungsmatrix A, welche die lineare Abbildung F in der Standardbasis $\mathcal{B}_e = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ darstellt?

b) Wir wollen in $\mathbb{R}^3$ neben der Standardbasis $\mathcal{B}_e$ noch die schiefen Basen

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

einführen. Berechnen sie die Transformationsmatrizen des Basiswechsels $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$ von $\mathcal{B}_e$ nach $\mathcal{B}_1$ bzw. von $\mathcal{B}_e$ nach $\mathcal{B}_2$. Welche Koordinaten hat der Vektor $\mathbf{v} = (1,\ 2,\ 3)^\top$ bezüglich den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$?

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$, die F in den Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ darstellt. Betrachten Sie dazu das Diagramm aus Abbildung 5.48 im Skript. Überprüfen Sie für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dass gilt: $\mathbf{B}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}$.

d) Berechnen Sie $\|F(\mathbf{x})\|$ für ein beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Fällt Ihnen etwas besonderes auf?
Bemerkung: Die Abbildung F beschreibt eine Rotation um den Winkel ϑ um die z-Achse. Man würde intuitiv erwarten, dass eine Rotation die Länge eines Vektors nicht verändert. Benutzen Sie die trigonometrische Identität $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Gegeben sei ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt und einer linearen Abbildung $F : V \to V$.

a) Mit V über $\mathbb{R}$ gilt, dass falls $\langle v, F(v)\rangle = 0$ für alle $v \in V$, F zwingend die Null-Abbildung sein muss ($F(v) = \mathbf{o}$ für alle $v \in V$). Beweisen Sie die Aussage, oder finden Sie ein passendes Gegenbeispiel.

b) Wie verhält es sich für V über $\mathbb{C}$?

4. Parallelogrammgleichung und normierte Räume.
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $\|.\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm, d.h. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle_V}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die Parallelogrammgleichung stimmt:

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(Vergleichen Sie mit dem Satz von Pythagoras!)

b) Sei $V = \mathbb{P}_n^{[0,1]}$ der Raum der Polynome von Grad $\leq n$, definiert auf dem Interavall $[0, 1]$:

$$p : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n.$$

Wir haben in der Vorlesung die Maximumnorm definiert, auch ∞-Norm genannt:

$$p \in V, \ \|p\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt in V gibt, dass diese Norm induziert. Das heisst, es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$, so dass $\|p\|_\infty = \sqrt{\langle p, p\rangle_V}$.

5. **a)** Gegeben sei ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass sich das Skalarprodukt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ folgendermassen darstellen lässt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Begründen Sie ihre Antwort.

b) Charakterisieren Sie die Menge der Matrizen $\mathbf{A}$ die über den Ausdruck

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$$

ein Skalarprodukt definieren. Es sind zwei konkrete Eigenschaften gefragt, so dass alle definierenden Eigenschaften des Skalarproduktes erfüllt sind.

c) Welche Eigenschaft muss eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen, damit ihre Spalten eine Orthonormalbasis bezüglich eines durch $\mathbf{A}$ definierten Skalarproduktes bilden (d.h., bezüglich des Skalarproduktes wie in **b)**). Geben Sie eine konkrete Gleichung an.

6. Bonusaufgabe

In dieser Aufgabe arbeiten wir im Vektorraum $\mathcal{P}_2^{[-1,1]}$ der reellen Polynome definiert im Intervall $[-1, 1]$ vom Grad 2. Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Gegeben ist eine orthonormale Basis bzgl. dem Skalarprodukt (1):

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} t, \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (-\frac{1}{3} + t^2) \right\} \tag{2}$$

und die beiden Polynome $f(t) = \sqrt{\frac{21}{2}} t + \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $g(t) = \frac{9\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(-\frac{1}{3} + t^2) + 2\sqrt{2}$.

a) Wir interessieren uns für den Winkel $\angle(f, g)$ zwischen diesen beiden Funktionen, wollen aber vermeiden, die Integrale der Form (1) ausrechnen zu müssen. Wie hilft uns da die Parsevalsche Formel (Satz 6.5) weiter?

b) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ξ von f und η von g bzgl. der Basis (2) und berechnen Sie den Winkel $\angle(f, g)$ mit deren Hilfe.

Siehe nächstes Blatt!

7. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) In einem Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt kann man jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthonormalen Basis ergänzen.

(b) Mit dem Gram-Schmidt Orthogonalisierungsvefahren kann man aus einer Menge linear abhängiger Vektoren eine gleich grosse Menge linear unabhängiger Vektoren berechnen.

(c) Zu einem Vektorraum von endlicher Dimension mit Skalarprodukt gibt es eine orthonormale Basis.

(d) Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist die Einheitsmatrix.

(e) Die Inverse der Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist ihre Transponierte.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Stimmt es, dass das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren beliebig gross sein kann?

(b) Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren in diesem Vektorraum finden?

Abgabe: Bis 15:00 Uhr, Freitag 20. November 2020

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`