Musterlösung 9

1. a)

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}_{1}\mathbf{v}^\top = \mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{P}^2 = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{A} + \underbrace{\mathbf{A}^2}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{A} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{I}-2\mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$$

b)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\perp}_{0} + \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\parallel}_{\xi} = \xi\mathbf{v} = \mathbf{x}_\parallel\text{: Orthogonale Projektion auf Gerade } \xi\mathbf{v}$$

$\mathbf{P}\mathbf{x} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp$: Orthogonale Projektion auf Ebene durch 0, senkrecht auf $\mathbf{v}$

$\mathbf{H}\mathbf{x} = (\mathbf{I}-2\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\parallel$: Spiegelung an der Ebene durch 0, senkrecht auf $\mathbf{v}$

c)

$\mathbf{H}^\top = (\mathbf{I}-2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)^\top = \mathbf{I}^\top - (2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)^\top = \mathbf{I} - 2(\mathbf{v}^\top)^\top\mathbf{v}^\top = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \mathbf{H}$, dadurch: $\mathbf{H}^\top\mathbf{H} = \mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$

d) Die Abbildungen F_A und F_P sind Projektionen, F_H ist invertierbar.

2. **a)** Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right)$. Nach dem Gram-Schmidt Verfahren folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_0 &= \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
\tilde{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{a}_1 - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{a}_1\rangle \mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\
\mathbf{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
\tilde{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{a}_2\rangle \mathbf{q}_0 - \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2\rangle \mathbf{q}_1\\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
\mathbf{q}_2 &= \sqrt{2}\tilde{\mathbf{q}}_2 = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Es gilt $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}$, da $\mathbf{Q}$ orthogonal ist. Es ergibt sich damit

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

c) Für eine reguläre, quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bildet das Gram-Schmidt Verfahren mit $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_k)$ eine orthogonale Basis des Raums $\operatorname{span}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k)$. Daher lässt sich der Vektor $\mathbf{a}_k$ als Linearkombination dieser Vektoren darstellen und es gilt $\mathbf{R}_{l,k} = 0$ für $l > k$. Da $\mathbf{Q}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ bildet, ist $\mathbf{R}$ eine obere Dreiecksmatrix.

d) Das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lässt sich lösen, indem man die Faktorisierung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ einsetzt. Mit der Substitution $\mathbf{y} = \mathbf{Rx}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\\
\Rightarrow &\mathbf{QRx} = \mathbf{b}\\
\Rightarrow &\mathbf{Qy} = \mathbf{b}\\
\Rightarrow &\mathbf{y} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{b}\\
\Rightarrow &\mathbf{y} = \mathbf{Rx}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\2\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Rückwertseinsetzen in $\mathbf{R}$ ergibt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Bonusaufgabe Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren für $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ an:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|_{\mathbf{A}}} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1{}^\top \mathbf{A} \mathbf{a}_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1{}^\top \mathbf{A} \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|_{\mathbf{A}}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}_2^\top \mathbf{A} \tilde{\mathbf{q}}_2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also die A-orthogonale Basis

$$W = \mathsf{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die letzte Normalisierung (Berechnung von $\mathbf{q}_2$) ist nicht nötig um die Aufgabe vollständig zu beantworten, da nur nach einer orthogonalen Basis, nicht nach einer othonormalen Basis gefragt wurde.

4. Wir wählen ein Polynom mit $d = n^2$. Dieses Polynom ist dann eine Linearkombination von $d+1 = n^2+1$ Matrizen. n^2+1 Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind immer linear abhängig. Es folgt, dass wir $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ finden können, mit $p(\mathbf{A}) = 0$, aber nicht alle $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ sind gleich null.

Bitte wenden!

5. **a)** Wir zeigen die Eigenschaften eines Skalarproduktes.

(S1)

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha(y_1+z_1) \\ \alpha(y_2+z_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(y_1+z_1) \\ \alpha(y_2+z_2) \end{pmatrix} \\ =& \alpha(3x_1y_1 + 3x_1z_1 - x_1y_2 - x_1z_2 + \\ & + 3x_2y_1 + 3x_2z_1 - x_2y_2 - x_2z_2) \\ =& \alpha(\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle)\end{aligned}$$

(S2)

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(S3)

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ &\geq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Wenn $x_1 \geq 0$ oder $x_2 \geq 0$, ist die erste Ungleichheit strikt, d.h. im Falle von Gleichheit $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$ muss gelten $x_1 = x_2 = 0$.

b)

$$\begin{aligned}\langle x, F(y)\rangle &= \langle F(x), y\rangle \\ x^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} F(y) &= (F(y))^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x \\ (3x_1 - 1x_2)(ay_1 + by_2) &= (ax_1 + bx_2)(3y_1 - 1y_2) \\ 3ax_1y_1 + 3bx_1y_2 - ax_2y_1 - bx_2y_2 &= 3ax_1y_1 - ax_1y_2 + 3bx_2y_1 - bx_2y_2 \\ a(-x_2y_1 + x_1y_2) &= b(3x_2y_1 - 3x_1y_2) \\ a(x_1y_2 - x_2y_1) &= -3b(x_1y_2 - x_2y_1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ falls $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 : a = -3b$, sonst a, b beliebig

6. **a)** Der Gram-Schmidt Algorithmus kann wie folgt implementiert werden.

```
function B = gramSchmidt(A, scalar_prod)
    [n, m] = size(A);
    B = zeros(n, m);
    for k = 1:m
```

Siehe nächstes Blatt!

```
        v = A(:,k);
        for j = 1:k-1
            v = v - scalar_prod(B(:,j), A(:,k)) * B(:,j);
        end
        B(:,k) = v / sqrt(scalar_prod(v, v));
    end

end
```

b) Folgende Befehle testen die Funktion mit dem Euklidischen Skalarprodukt.

```
>> A =[3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
>> scalar_prod1 = @(x,y)x'*y;
>> gramSchmidt(A, scalar_prod1)

ans =

     1     0     0
     0    -1     0
     0     0     1
```

c) Folgende Befehle testen die Funktion mit dem alternativen Skalarprodukt:

```
>> C = [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
>> scalar_prod2 = @(x,y) y'*C*x;
>> gramSchmidt(A, scalar_prod2)

ans =

    0.7071    0.4082   -0.2887
         0   -0.8165   -0.2887
         0         0    0.8660
```

Es soll dazu motiviert werden, schon bei diesen kleineren Aufgaben eine `Call`-File zu schreiben, in der die Funktion aufgerufen wird. Ein Beispiel dazu wäre:

```
disp('---------------------------------')
disp(' Lineare Algebra 2015, Aufgabe 4')

%%% SUBPROBLEM a) %%%
clear all, close all

%% Define Input for gramSchmidt function
A = [3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
scalar_prod = @(x,y) x'*y;

%% Run function
B = gramSchmidt(A, scalar_prod);
```

Bitte wenden!

```
disp('Teilaufgabe a)')
disp('  Das berechnete Orthonormalsystem lautet: ')
disp(B)

%%% SUBPROBLEM b) %%%
clear all,close all
%% Define Input for gramSchmidt function
M = [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
A = [3 2 1; 0 -6 3; 0 0 3];
scalar_prod = @(x,y) x'*M*y;

%% Run function
B = gramSchmidt(A, scalar_prod);
disp('Teilaufgabe b)')
disp('  Das berechnete Orthonormalsystem lautet: ')
disp(B)
disp('----------------------------------')
```

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit der gleichen Dimension. Welche der folgenden Eigenschaften ist wahr?

(a) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{BA}$ ist nicht orthogonal.

(b) Das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{AB}$ ist nicht orthogonal.

$\surd$ (c) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind orthogonal.

(d) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind nicht orthogonal.

Es gilt: $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^{-1}$ und weiter $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1}$ und auch umgekehrt $(\mathbf{BA})^\top = (\mathbf{BA})^{-1}$

Bitte wenden!

2. Seien V, W zwei reelle Vektorräume mit Skalarprodukten, sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und sei $F : V \to W$ eine orthogonale Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) $\|F(v)\|_W = \|v\|_V$ für alle $v \in V$.

Folgt direkt aus der Definition von der Skalarprodukt-induzierten Norm und der Orthogonalität von F.

$\surd$ (b) F ist *winkeltreu*, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt, dass $\measuredangle(F(v), F(w)) = \measuredangle(v, w)$.

Folgt direkt aus der Definition des Winkels und der Orthogonalität von F.

(c) F ist ein Isomorphismus.

F ist nur ein Isomorphismus falls dim V = dim $W < \infty$, was aber hier nicht zwingend gegeben ist.

(d) Falls $\dim V, \dim W < \infty$, ist es möglich, dass $\dim V > \dim W$.

Mit $\dim V > \dim W$ existiert keine orthogonale Abbildung $F : V \to W$

$\surd$ (e) F ist injektiv.

Für irgend ein $v \in \mathrm{Ker}(F)$

$$\begin{aligned}
&\langle v, v\rangle = \langle F(v), F(v)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow v = 0 \quad \text{(Satz 2.9 S3)} \\
&\Rightarrow \mathrm{Ker}(F) = \{0\} \\
&\Rightarrow \text{F ist injektiv}
\end{aligned}$$

$\surd$ (f) F ist ein Isomorphismus auf das Bild von F.

F ist wie vorher gezeigt injektiv und offensichtlich surjektiv auf sein Bild. Da die Inversen von linearen Abbildungen auch linear sind, ist F also ein Isomorphismus.

(g) Die Menge der Bilder $F(\mathcal{B})$ ist eine Orthonormalbasis von W.

Da F nicht zwingend ein Isomorphismus ist, kann der Bildraum kleiner sein als W.

$\surd$ (h) Die Menge der Bilder $F(\mathcal{B})$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Im}(F)$.

Dies folgt aus der Isomorphismen-Eigenschaft von F aus der obigen Frage.

$\surd$ (i) Falls es existiert, ist $F^{-1} : \mathrm{Im}(F) \to V$ orthogonal.

Es existiert wie oben gesehen. Dass die Inverse orthogonal ist, folgt direkt aus der Definition von orthogonalen Abbildungen.