Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 9

1. Gegeben sei ein *Einheitsvektor* $\mathbf{v}$ von $\mathbb{R}^3$. Seien die 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definiert durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{P} := \mathbf{I_3} - \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{H} := \mathbf{I_3} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{H}^2$.

b) Die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definieren lineare Abbildungen:

$$F_A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$F_P : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$F_H : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Beschreiben Sie die Abbildungen F_A, F_P, F_H geometrisch.
Hinweis: Zerlegen Sie den Vektor $\mathbf{x}$ in zwei Teile senkrecht und parallel zu $\mathbf{v}$, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$ mit $\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_\perp = 0$ und $\mathbf{x}_\parallel = \xi \mathbf{v}$ ($\xi \in \mathbb{R}$).

c) Zeigen Sie: Die Abbildung F_H ist orthogonal.

d) Welche der drei linearen Abbildungen sind invertierbar, welche sind Projektionen?
Bemerkung: Eine lineare Abbildung $F : X \to X$ heisst *Projektion*, falls $F \circ F = F$. Die Matrix H heisst *Householdermatrix* und die Abbildung F_H *Householdertransformation*.

2. Jede reelle Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ lässt sich als das Produkt einer orthogonalen Matrix $\mathbf{Q}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$ darstellen. Gegeben ist die invertierbare Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ an. Das Ergebnis bildet die Spalten der Matrix $\mathbf{Q}$.

b) Wählen Sie die Spalten der Matrix $\mathbf{R}$ so, dass $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ gilt. Dafür müssen Sie die Spalten von $\mathbf{A}$ in der durch die Matrix $\mathbf{Q}$ gegebenen Basis darstellen.

c) Warum ist $\mathbf{R}$ für eine invertierbare, quadratische Matrix $\mathbf{A}$ immer eine obere Dreiecksmatrix?

d) Wie kann die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ verwendet werden, um lineare Gleichungssysteme der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen? Geben Sie die Lösung für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^\top$ an.

3. Bonusaufgabe

Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein Vektorraum und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix. Wir definieren das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$ und zwei Vektoren, die den Unterraum W von V erzeugen:

$$W = \mathsf{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie nun eine othogonale Basis von W mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bezüglich des Skalarproduktes $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{A}}$.

4. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{E}^{n\times n}$. Beweisen Sie, dass es immer ein Polynom

$$p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 x^0$$

gibt, sodass $d \leq n^2$, nicht alle Koeffizienten $\alpha_i = 0$ sind und $p(\mathbf{A}) = 0$. Erinnerung: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_{n\times n}$ ist die Identitätsmatrix.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung ein Skalarprodukt in $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ definiert:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

b) Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Wie müssen a, b gewählt sein, damit F Hermitesch in Bezug auf das in a) definierte Skalarprodukt ist?

Definition Hermitesche Abbildung. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{E}$ mit Skalarprodukt. Eine lineare Selbstabbildung $F : V \to V$ heisst Hermitesch wenn für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\langle x, F(y) \rangle = \langle F(x), y \rangle.$$

6. MATLAB-Aufgabe - Gram-Schmidt-Algorithmus

In dieser Aufgabe sollen Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisiereungsverfahren gemäss Algorithmus 6.1 implementieren. Wir wollen uns dabei jedoch noch nicht auf ein spezifisches Skalarprodukt beschränken, d.h. das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ soll als eine beliebige Funktion, welche die Axiome (S1) bis (S3) des Kapitels 6.2 erfüllt, aufgefasst werden. Dadurch erhalten wir eine Implementierung das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren, welches für jedes beliebige Skalarprodukt angewendet werden kann.

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function B = gramSchmidt(A, scalar_prod)`. Dabei soll `scalar_prod` ein Function Handle sein. Das normale Euklidische Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ wäre zum Beispiel die Funktion `@(x,y)x'*y`. Der erste Input `A` ist eine Matrix, die diejenigen Vektoren, die die Funktion zu einer Orthonormalbasis ergänzen soll, als Spalten erhält.

b) Testen Sie Ihren Algorithmus mit der Matrix A

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und mit dem normalen Euklidischen Skalarprodukt. Geben Sie die berechnete Orthonormalbasis B an.

c) Testen Sie Ihren Algorithmus mit der Matrix $\mathbf{A}$ und mit dem Skalarprodukt definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{y}^H \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Geben Sie die berechnete Orthonormalbasis $\mathbf{B}$ an.

Bitte wenden!

7. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit der gleichen Dimension. Welche der folgenden Eigenschaften ist wahr?

(a) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{BA}$ ist nicht orthogonal.

(b) Das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ ist orthogonal, aber $\mathbf{AB}$ ist nicht orthogonal.

(c) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind orthogonal.

(d) Das Matrixprodukt $\mathbf{AB}$ und das Matrixprodukt $\mathbf{BA}$ sind nicht orthogonal.

2. Seien V, W zwei reelle Vektorräume mit Skalarprodukten, sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und sei $F : V \to W$ eine orthogonale Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\|F(v)\|_W = \|v\|_V$ für alle $v \in V$.

(b) F ist *winkeltreu*, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt, dass $\measuredangle(F(v), F(w)) = \measuredangle(v, w)$.

(c) F ist ein Isomorphismus.

(d) Falls $\dim V, \dim W < \infty$, ist es möglich, dass $\dim V > \dim W$.

(e) F ist injektiv.

(f) F ist ein Isomorphismus auf das Bild von F.

(g) Die Menge der Bilder $F(\mathcal{B})$ ist eine Orthonormalbasis von W.

(h) Die Menge der Bilder $F(\mathcal{B})$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Im}(F)$.

(i) Falls es existiert, ist $F^{-1} : \mathrm{Im}(F) \to V$ orthogonal.

Abgabe: Bis 15:00 Uhr, Freitag 27. November 2020