Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 10

1. Die Modellfunktion f ist eine Linearkombination der Funktionen g_1 und g_2 und kann als

$$f(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) = \alpha 2^x + \beta 2^{-x}$$

geschrieben werden, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die zu bestimmenden Parameter sind. Mit Hilfe der gegebene Messpunkte könne wir ein überbestimmtes Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ aufstellen mit:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.25 & 4 \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 4 & 0.25 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Durch das Lösen der Normalengleichung $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ (z.B. mit Hilfe des Backslash-Operators in Matlab) erhalten wir für die gesuchten Modellparameter $\mathbf{x}$:

$$\alpha = 2.9137, \beta = -2.4196.$$

2. Aus $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$ folgt

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ gilt. Aus der Vorlesung ist bekannt (Satz 6.9), dass sich $\mathbb{C}^m$ als direkte Summe des Spaltenraums von $\mathbf{A}$ und des Nullraums von $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ ergibt:

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Man kann den Vektor $\mathbf{b}$ also darstellen als

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_n + \mathbf{b}_r$$
$$\text{mit } \mathbf{b}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_r \in \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Da $\mathbf{b}_r$ ein Element des Spaltenraums von $\mathbf{A}$ ist, lässt sich der Vektor mithilfe des Vektors $\mathbf{x}_b \in \mathbb{C}^n$ darstellen:

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{A}\mathbf{x}_b.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbf{b} = \mathbf{b}_n + \mathbf{b}_r \\ \Rightarrow\ &\mathbf{b} = \mathbf{b}_n + \mathbf{A}\mathbf{x}_b \\ \Rightarrow\ &\mathbf{A}\mathbf{x}_b - \mathbf{b} = -\mathbf{b}_n \end{aligned}$$

Und insgesamt

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{x}_b - \mathbf{b}) = -\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}_n = 0,$$

da $\mathbf{b}_n$ Element des Nullraums von $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ ist. Damit ist $\mathbf{x} = \mathbf{x}_b$ eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Da $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) < n$ und $n < m$, ist der Kern von $\mathbf{A}$, und damit auch von $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$, nicht trivial. Somit gibt es unendlich viele Lösungen.

Siehe nächstes Blatt!

3. Bonusaufgabe

a) Der quadrierte Abstand der Punkte $\mathbf{p}_i$ von einem Kreis um den Ursprung mit Radius r ist gegeben durch

$$\sum_i (r - ||\mathbf{p}_i||)^2 = (r-2)^2 + (r-4)^2 + (r-3)^2 + (r-5)^2. \tag{1}$$

Der gesuchte Radius r ist also die Lösung des überbestimmten Gleichungssystems

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Sie ergibt sich damit als

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} r = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \Rightarrow 4r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

b) Die Transponierte einer reguläre Matrix ist invertierbar. Damit gilt

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top b \\ \Leftrightarrow &\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-\top} \mathbf{A}^\top b \\ \Leftrightarrow &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich auch umformen

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^\top b = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

und argumentieren, dass der Kern einer regulären Matrix trivial ist und daher aus $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ direkt $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folgt und umgekehrt.

4. MATLAB-Aufgabe

a) $D^2(f(p_i)) \stackrel{!}{=} 0$ ist erfüllt falls wir eine maximale glatte Kurve haben, sprich eine Gerade. Die Form der original Kurve würde damit aber verloren gehen. Deshalb möchten wir mit dem zweiten Set von Gleichungen $p_i \stackrel{!}{=} \widetilde{p}_i$, dass der Abstand der gefundenen Punkte $\mathbf{p}$ zu den Referenzpunkten $\widetilde{\mathbf{p}}$ null ist, so dass die Form erhalten bleibt. Offensichtlich können wir nicht beide Sets von Gleichungen erfüllen. Wenn wir aber eine Lösung mit der Methode der kleinsten Quadrate suchen, können wir einen Kompromiss finden zwischen diesen beiden Bedingungen, welche eine Glättung der Kurve zur Folge hat, die der original Form ähnlich ist.

b) $\mathbf{A}$ ist eine $2n \times n$ Matrix. Wobei n die Anzahl der gegebenen Punkte ist. Für 5 Punkte sieht sie wie folgend aus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
```
% ls_smoothing.m
function ls_smoothing(w,path)
path = 'curves/bird.txt';
w = 0.5;

xy_0 = load(path);

% we assume x and y are prepared as column-vectors
% compute the number of vertices
n=length(xy_0);

% geometry dimensions needed for the plot
xmin = min(xy_0(:,1));
xmax = max(xy_0(:,1));
ymin = min(xy_0(:,2));
ymax = max(xy_0(:,2));

% plot the original curve
close;
% plot(xy_0(:,1), xy_0(:,2), '.-');
axis([xmin xmax ymin ymax]);
```

```
axis equal;
axis off;
hold on;

% Laplacian matrix (uniform Laplacian of a closed curve)
e = ones(n,1);
L = diag(-e,0) + 0.5*(diag(e(1:end-1),1) + diag(e(1:end-1,1),-1));
L(1,n) = 0.5;
L(n,1) = 0.5;

% Add target points equations xy_0
A = [L;eye(n)];

% Right handsides
bx = zeros(2*n,1);
by = zeros(2*n,1);
bx(n+1:end) = xy_0(:,1);
by(n+1:end) = xy_0(:,2);

% Build equality weighting matrix W
vw = ones(2*n,1);
vw(n+1:end) = w;
W = diag(vw,0);

% Weight residuals
A = W*A;
bx = W*bx;
by = W*by;

% Solve least squares systems
% Note: The backslash operator of Matlab will automatically
% solve a least squares problem if A is overdetermined,
% therefore we don't have to formulate this explicitly.
xy(:,1) = A\bx;
xy(:,2) = A\by;

% plot the smoothed curve
plot(xy(:,1), xy(:,2), '.-');
title(sprintf('Smoothed curve'));
```

d) $\mathbf{W}$ ist eine $2n \times 2n$ Diagonalmatrix welche für die ersten n Diagonalelemente den Wert 1 hat und für die restlichen den Wert w. So werde die zweiten n kleinsten Quadrate der Differenz zu den Referenzpunkten höher gewichtet, als die der Glättung der Kurve.

5. Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Kolonnen. Seien $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen mit orthonormalen Kolonnen und $\mathbf{R}, \mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere (rechte) Dreiecksmatrizen, wobei die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{R}$ positiv sind. Hinweis: Die QR-Zerlegung, wie wir Sie in Serie 9 Aufgabe 2 kennengelernt haben ist für $m \geq n$ und Rang $\mathbf{A} = n$ eindeutig, wenn man die Vorzeichen der Diagonalelemente von der Dreiecksmatrix vorgibt.

Welche der folgenden Aussagen sind unbedingt richtig wenn $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$ gilt?

(a) $\mathrm{Rang}\,\mathbf{R} = m$

√ (b) $\mathrm{Rang}\,\mathbf{R} = n$

(c) $\mathrm{Rang}\,\mathbf{R}_1 = m$

√ (d) $\mathrm{Rang}\,\mathbf{R}_1 = n$

√ (e) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1$ ist eine reguläre Matrix

√ (f) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1$ ist eine orthogonale Matrix

√ (g) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1$ ist eine obere Dreiecksmatrix

√ (h) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1$ ist eine untere Dreiecksmatrix

√ (i) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1$ ist eine Diagonalmatrix

(j) $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$

Da die Kolonnen von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind, haben wir $m \geq n$. Die Kolonnen von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}_1$ sind auch linear unabhängig, deshalb müssen die Matrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}_1$ vollen Rang haben, nämlich n.

Die QR-Zerlegung ist für $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = n$ eindeutig, wenn man die Vorzeichen der Diagonalelemente von der Dreiecksmatrix vorgibt. Weil die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{R}$ positiv sind, gibt es unbedingt eine Matrix $\mathbf{S} = \mathrm{diag}\,\{\pm1, \ldots, \pm1\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die $\mathbf{R}_1 = \mathbf{SR}$ und $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{QS}^{-1}$ erfüllt. Damit erhält man $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}^\top\mathbf{QS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}$. Dieses Matrixprodukt ist immer eine Diagonalmatrix.

Aber allgemein gelten $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$ nicht: man kann bspw. $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{QS}^{-1}$ und $\mathbf{R}_1 = \mathbf{SR}$ mit $\mathbf{S} = \mathrm{diag}\,\{\pm1, \ldots, \pm1\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ nehmen.

Siehe nächstes Blatt!

2. Welche der folgenden Lösungen ist richtig?

$$\mathsf{det}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-i & i^2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & i & b \\ i-2 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -i & -a & 0 & i \\ 1 & -b & -1 & i^3 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

(a) i

(b) i^2

$\surd$ (c) 0

(d) $a \cdot b$

(e) $a \cdot b \cdot i$

Schiefsymmetrische Matrix mit ungerader Dimension.