D-INFK
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2020

Serie 10

1. In dieser Aufgabe wollen wir die Parameter einer gewissen Modellfunktion aus ein paar gemessenen Werten bestimmen. Das Modell $f(x)$ sei gegeben als eine lineare Kombination von den zwei Funktionen:

$$g_1(x) = 2^x \text{ und } g_2(x) = 2^{-x}.$$

Wir kennen folgende fünf Messpunkte:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-8	-4	-2	4	12

Da das Modell die Realität niemals perfekt abbildet und auch die Messwerte immer nur innerhalb gewisser Toleranzen stimmen, gibt es keine eindeutige Funktion $f(x)$, so dass diese für alle Messpunkte passt. Finden Sie deshalb plausible Modellparameter, so dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{5} |f(x_i) - y_i|^2$$

minimal wird, mittels der Normalengleichung. Stellen Sie dazu das entsprechende Gleichungssystem auf.

Hinweis: Sie müssen die Matrixoperationen nicht per Hand durchführen. Verwenden Sie beispielsweise den '\'-Operator von Matlab.

Bitte wenden!

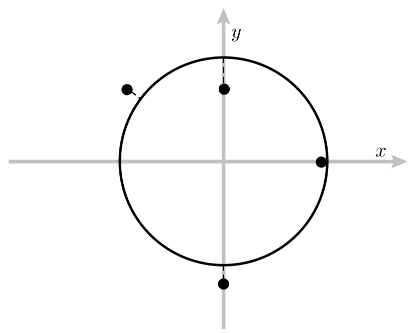
2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ und $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) < n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$$

immer lösbar ist und ∞ viele Lösungen hat.

3. Bonusaufgabe

a) Gegeben sind die vier Punkte $(0, 2), (0, -4), (3, 0), (-3, 4)$ in der Ebene.



Bestimmen Sie den Radius eines Kreises um den Ursprung, sodass die Summe der quadrierten Abstände (gestrichelte Linien) der vier Punkte zum Kreis minimal ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst wie das entsprechende überbestimmte Gleichungssystem aussieht.

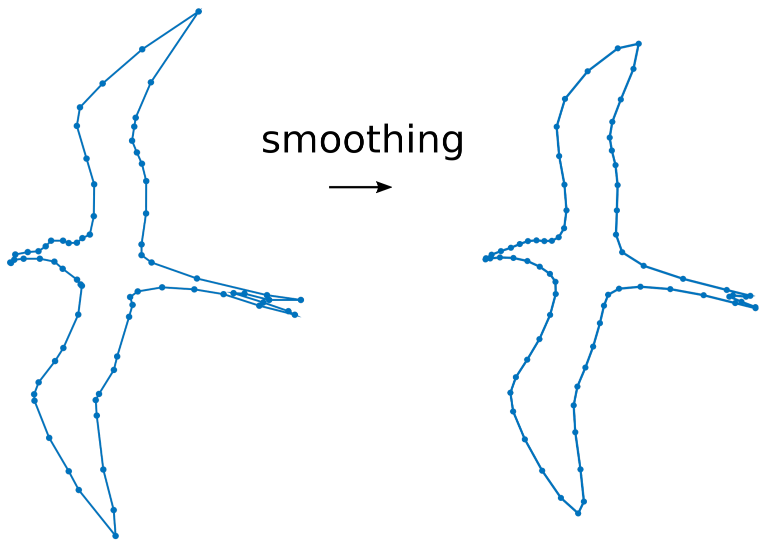
b) Sei $\mathbf{A}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ und } \mathbf{A}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\top}\mathbf{b}$$

identisch sind.

Siehe nächstes Blatt!

4. MATLAB-Aufgabe: In dieser Aufgabe wollen wir das Problem der Kurven Glättung anschauen. In vielen grafischen Anwendungen werden Kurven verwendet um geometrische Formen darzustellen. Dabei besteht eine Kurve aus mehreren miteinander durch Geraden verbundenen Punkten: Je mehr Punkte man verwendet, desto detailliertere wird die Kurve. Oft können



diese dadurch aber auch wackelig aussehen, gerade wenn sie von Hand am Computer gezeichnet werden. In diesen Fällen möchte man die Kurven glätten, so dass kleine Unebenheiten verschwinden, die Gesamtheit der Form aber erhalten bleibt.

Dazu berechnen wir mit Hilfe des 1D Laplace-Operators die Krümmung der stückweise linearen Kurve f für alle n Punkte p_i, jeweils separat in X und Y-Richtung.

$$D_x^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,x} + p_{i-1,x}}{2} - p_{i,x}$$
$$D_y^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,y} + p_{i-1,y}}{2} - p_{i,y}$$

p_i ist der aktuelle Punkt, p_{i-1} der vorherige und p_{i+1} der nächste der Kurve. Je spitzer die Kurve ist, desto grösser ist auch der Betrag der Laplace Werte. Damit können wir nun zwei separate lineare Gleichungssysteme aufstellen in dem wir die neuen X und Y-Koordinaten für die Punkte einer gegeben geschlossenen Kurve suchen, so dass:

$$D_x^2(f(p_i)) \stackrel{!}{=} 0$$
$$p_{i,x} \stackrel{!}{=} \widetilde{p}_{i,x}$$

$$D_y^2(f(p_i)) \stackrel{!}{=} 0$$
$$p_{i,y} \stackrel{!}{=} \widetilde{p}_{i,y}$$

wobei $\widetilde{p}$ die Punkte der ungeglätteten Kurve sind.

Bitte wenden!

a) Was drücken diese Gleichungen genau aus? Was will damit erreicht werden?

b) Welche Dimension hat die Koeffizienten Matrix $\mathbf{A}$ dieser linearen Gleichungssysteme? Beschreiben Sie $\mathbf{A}$ für eine geschlossene Kurve mit 5 Punkten. Eine geschlossene Kurve hat den gleichen Start und Endpunkt.

c) Offensichtlich können nicht alle Gleichungen für beliebige Kurven erfüllt werden. Formulieren Sie deshalb das Problem im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate und implementieren Sie diese in der MATLAB-Funtion *ls_smoothing*. Auf der Webpage finden sie eine Vorlage für die Funktion und verschiedene vordefinierte Kurven. Testen Sie Ihre Implementation für die Kurve *curve/bird.txt*. (Nützliche MATLAB-Befehle: \\-*Operator* oder *linsolve*, *diag*, *zeros*, *ones*)

d) Damit wir die Stärke der Glättung der Kurve besser kontrollieren können wollen wir eine Gewichtung für die Fehler der kleinsten Quadrate einführen:

$$\arg\min_{\mathbf{p}} ||\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}})||_2^2$$

$\mathbf{W}$ ist dabei eine Diagonalmatrix welche die verschiedenen Zeilen von $\mathbf{A}\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}$ mit dem jeweiligen Diagonalelement multipliziert. Wie muss $\mathbf{W}$ aussehen, so dass wir mit einem einzigen Parameter w die Wichtigkeit (Gewichtung) der Distanz der Referenzpunkte $\widetilde{\mathbf{p}}$ zu den neuen Punkten $\mathbf{p}$ erhöhen können, relative zur Glättung der Kurve? Integrieren Sie das in der Funktion *ls_smoothing* und testen Sie diese mit verschiedenen Werte für w im Bereich 0.001 bis 100.

Siehe nächstes Blatt!

5. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Kolonnen. Seien $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen mit orthonormalen Kolonnen und $\mathbf{R}, \mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere (rechte) Dreiecksmatrizen, wobei die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{R}$ positiv sind. Hinweis: Die QR-Zerlegung, wie wir Sie in Serie 9 Aufgabe 2 kennengelernt haben ist für $m \geq n$ und $\mathsf{Rang}\ \mathbf{A} = n$ eindeutig, wenn man die Vorzeichen der Diagonalelemente von der Dreiecksmatrix vorgibt.

Welche der folgenden Aussagen sind unbedingt richtig wenn $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$ gilt?

(a) $\mathrm{Rang}\, \mathbf{R} = m$

(b) $\mathrm{Rang}\, \mathbf{R} = n$

(c) $\mathrm{Rang}\, \mathbf{R}_1 = m$

(d) $\mathrm{Rang}\, \mathbf{R}_1 = n$

(e) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1$ ist eine reguläre Matrix

(f) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1$ ist eine orthogonale Matrix

(g) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1$ ist eine obere Dreiecksmatrix

(h) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1$ ist eine untere Dreiecksmatrix

(i) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1$ ist eine Diagonalmatrix

(j) $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Lösungen ist richtig?

$$\mathsf{det}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-i & i^2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & i & b \\ i-2 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -i & -a & 0 & i \\ 1 & -b & -1 & i^3 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

(a) i

(b) i^2

(c) 0

(d) $a \cdot b$

(e) $a \cdot b \cdot i$

Abgabe: Bis 15:00 Uhr, Freitag 4. Dezember 2020

http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/