Musterlösung 11

1. Wir betrachten den Fall der oberen Blockdreiecksmatrix und nehmen an, $\mathbf{A}$ sei ein $m \times m$ Block und $\mathbf{C}$ ein $(n-m) \times (n-m)$ Block. Es leisten nur jene Permutationen p einen Beitrag, für die $p(1), \ldots, p(m) \in \{1, \ldots, m\}$ gilt; die anderen führen auf mindestens einen Faktor aus $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Die relevanten Permutationen p haben die Form:

$$(1, \ldots, m; m+1, \ldots n) \mapsto \big(p_{\mathbf{A}}(1), \ldots, p_{\mathbf{A}}(n); m + p_{\mathbf{C}}(1), \ldots, m + p_{\mathbf{C}}(n-m)\big)$$

Mit $p_{\mathbf{A}} \in S_m$ und $p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}$ und $\operatorname{sign} p = \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}}$ wird damit:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} &= \sum_{\substack{p_{\mathbf{A}} \in S_m \\ p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}}} \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}} \cdot a_{1,p_{\mathbf{A}}(1)} \cdots a_{m,p_{\mathbf{A}}(m)} \ \times \\
&\qquad c_{1,p_{\mathbf{C}}(1)} \cdots c_{n-m,p_{\mathbf{C}}(n-m)} \\
&= \sum_{p_{\mathbf{A}} \in S_m} \operatorname{sign} p_{\mathbf{A}} \cdot a_{1,p_{\mathbf{A}}(1)} \cdots a_{m,p_{\mathbf{A}}(m)} \ \times \\
&\quad \sum_{p_{\mathbf{C}} \in S_{n-m}} \operatorname{sign} p_{\mathbf{C}} \cdot c_{1,p_{\mathbf{C}}(1)} \cdots c_{n-m,p_{\mathbf{C}}(n-m)} \\
&= \det \mathbf{A} \det \mathbf{C}
\end{aligned}$$

2. Damit wir die Determinante von $\mathbf{M}$ mit Hilfe des gegebenen Satzes für Blockdreiecksmatrizen berechnen können, müssen wir zuerst deren Struktur erkennen. Wir sehen, dass der obere rechte Teil schon einige Nulleinträge enthält. Wir können diesen Block aber noch vergrössern, in dem wir die Matrix $\mathbf{M}$ mit einer Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ multiplizieren und so die erste Spalte mit der vierten vertauschen:

$$\mathbf{MP} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun den Satz für die Berechnung der Determinante einer Blockdreiecksmatrix aus Aufgabe 3 verwenden wollen, können wir das Ganze noch Transformieren $(\mathbf{MP})^\top$. Da aber für beliebige quadratische Matrizen $\mathbf{G}$ gilt, dass $\det \mathbf{G} = \det \mathbf{G}^\top$, wäre diese Transformation nicht unbedingt nötig, da:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D}$$

Wir können nun die Determinante von $\mathbf{M}$ wie folgend berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{MP} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{SP}^{-1} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{SP} \quad (\text{da } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}) \\ \det \mathbf{M} &= \det (\mathbf{SP}) \\ \det \mathbf{M} &= \det \mathbf{S} \det \mathbf{P} \\ \det \mathbf{M} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \det \mathbf{P} \\ \det \mathbf{M} &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{D} \det \mathbf{P} \quad \left(\text{mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Die Determinante einer Permuationsmatrix ist einfach zu berechnen, da diese nur eine Permutation der Einheitsmatrix ist. In unserem Fall wurde nur ein Zeile vertauscht und $\det \mathbf{P} = -1$. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Somit erhalten wir:

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D} \det \mathbf{P} = (1 \cdot 7 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 6) \cdot -1 = -1008$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Für eine orthogonal Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \\ \Rightarrow \mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}) &= \mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^\top)\mathsf{det}\,(\mathbf{Q}) = \mathsf{det}\,(\mathrm{I}) = 1 \end{aligned}$$

Wegen $\mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^\top) = \mathsf{det}\,(\mathbf{Q})$ folgt also $\mathsf{det}\,(\mathbf{Q})^2 = 1$ und damit $\mathsf{det}\,(\mathbf{Q}) \pm 1$.

b) Eine Möglichkeit wäre

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist als Produkt der Diagonalelement 1. Die Matrix ist allerdings nicht orthogonal, da die Zeilen nicht normiert sind.

c) Ähnlich zu a) gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \\ \Rightarrow \mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}) &= \mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^H)\mathsf{det}\,(\mathbf{Q}) = \mathsf{det}\,(\mathrm{I}) = 1 \end{aligned}$$

Mit $\mathsf{det}\,(\mathbf{Q}^H) = \overline{\mathsf{det}\,\mathbf{Q}}$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mathsf{det}\,\mathbf{Q}}\,\mathsf{det}\,\mathbf{Q} &= |\mathsf{det}\,\mathbf{Q}|^2 = 1 \\ \Rightarrow |\mathsf{det}\,\mathbf{Q}| &= 1. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. **a)** Wir entwickeln zuerst nach der 3. Spalte, dann nach der 1. und schliesslich wieder nach der 3. Spalte:

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= b \cdot (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & c \\ a & 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= b \cdot \left(a \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & c \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= b \cdot \left(-a \cdot \left(c \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \right) \\
&= b \cdot (-a \cdot (c \cdot -2 + 1 \cdot 9)) \\
&= ab(2c - 9)
\end{aligned}
$$

Falls $\det \mathbf{A} = ab(2c - 9) = 0$, dann ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär, sprich, nicht invertierbar. Dies gilt für $a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 4.5$.

b) Wir berechnen den Gauss-Algorithmus:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}
$$

Also ist $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{R} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$.

Siehe nächstes Blatt!

5. a)

$$\mathsf{det}\,(\mathbf{A}) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^2$$

$$\mathsf{det}\,(\mathbf{B}) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2b - 2b = 0$$

b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine schiefsymmetrische Matrix, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{A}^\top \\ \mathsf{det}\,(\mathbf{A}) &= \mathsf{det}\,(\mathbf{A}^\top) \\ &= \mathsf{det}\,(-\mathbf{A}^\top) \\ &= \mathsf{det}\,((-1)\cdot\mathbf{A}^\top) \\ &= (-1)^n \mathsf{det}\,(\mathbf{A}^\top) \\ &= (-1)^n \mathsf{det}\,(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Die Gleichung $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = -\mathsf{det}\ \mathbf{A}$ (n ungerade) ist nur erfüllt für $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = 0$ und damit gilt:

$$\mathsf{det}\,(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathsf{det}\,(\mathbf{A}^\top) & n = 2k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k+1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{det}\,(\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 1 \\ -a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-a+3)^2 = a^2 - 6a + 9 \qquad \text{(Pfaffsche Determinante)} \end{aligned}$$

alternativ kann die Determinante von $\mathbf{C}$ auch durch Entwicklung nach Zeile und Spalten oder mit dem Gauss-Algorithmus bestimmt werden.

$$\mathsf{det}\,(\mathbf{D}) = 0, \quad (\,\mathrm{grad}(\mathbf{D}) = 5,\ \text{ist ungerade})$$

Bitte wenden!

6. Bonusaufgabe

Erinnern Sie sich an die wichtigen Rechenregeln für Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. Determinanten:

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$
- $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$

Wir betrachten zunächst die Matrix $\mathbf{B}$ und können folgern:

$$2 = \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 16 \cdot \det(\mathbf{B})$$

und daher: $\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{8}$. Das heisst, dass $\mathbf{B}$ regulär, also invertierbar ist. Da aber $\mathbf{BC}$ singulär ist, folgt, dass $\mathbf{C}$ singulär sein muss, also $\det(\mathbf{C}) = 0$. Damit folgt nun:

a) $\det(\mathbf{CA}) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{A}) = 0$

b) $\det(-\mathbf{AB}^{-1}) = (-1)^2 \cdot \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})^{-1} = 16 \cdot 8 = 128$

c) $\det(\mathbf{A}^\top\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 16/8 = 2$

d) $\det(\mathbf{BC} - \mathbf{AB}^{-1}\mathbf{C}) = \det((\mathbf{B} - \mathbf{AB}^{-1}) \cdot \mathbf{C}) = 0$

e) $\det(\mathbf{B} + \mathbf{B}) = \det(2\mathbf{B}) = 2^2 \cdot \det(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}$

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Aufgaben:

1. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen $a_{ij} = ij$ und $n > 1$.
Welche Aussage ist richtig?

√ (a) $\det \mathbf{A} = 0$

(b) $\det \mathbf{A} = 1$

(c) $\det \mathbf{A} = -1^n$

(d) $\det \mathbf{A} = -2^n$

Die Matrix $\mathbf{A}$ sieht folgendermassen aus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Die Zeilen 2 bis n sind Vielfache der Zeile 1 und damit linear abhängig. Die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen ist Null.

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ korrekt?

(a) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

$\det(2\mathbf{A}) = 2^n \det(\mathbf{A})$

√ (b) $\det(\mathbf{A}^4) = (\det(\mathbf{A}))^4$

$\det(\mathbf{A}^2) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A})$ und entsprechend für $\det(\mathbf{A}^4)$.

(c) Sei $\mathbf{A}$ eine Dreiecksmatrix mit der Eigenschaft $a_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$ (rechts unten stehen also Nullen). Die Determinante lässt sich mit der Formel $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \dots a_{n,1}$ berechnen.

Nein. Ein einfaches Beispiel ist $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{pmatrix} = -a_{1,2}a_{2,1}.$$

(d) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

Z.B. ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, aber $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

√ (e) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{BA})$.

√ (f) Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, dann ist auch $\mathbf{AB}$ singulär.

Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, ist $\det(\mathbf{A}) = 0$. Daher ist $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 0$, und somit ist $\mathbf{AB}$ auch singulär.

√ (g) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^\mathsf{T})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Gegeben sei die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{3\times 3}$ deren Einträge natürliche Zahlen sind und für die gilt, dass alle Einträge entweder nur einmal vorkommen oder Null sind. Welche der folgenden Möglichkeiten kommen für den Wert der Determinante $\det(\mathbf{A})$ in Frage?

(a) 5

$\surd$ (b) 6

(c) -2

$\surd$ (d) 35

Die Determinante muss sich als Produkt von drei verschiedenen positiven und ganzen Zahlen (den Diagonalelementen) darstellen lassen. Das ist nur für $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ und $35 = 1 \cdot 5 \cdot 7$ möglich.