D-INFK Lineare Algebra HS 2020
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 11

1. Gegeben ist eine 2x2 Blockmatrix:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{m\times m} \\ \mathbf{C} &\in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)} \\ \mathbf{B} &\in \mathbb{R}^{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0} &\in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{det} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \mathsf{det}\ \mathbf{A} \cdot \mathsf{det}\ \mathbf{C}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Determinante einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$:

$$\mathsf{det}\ \mathbf{A} = \sum_{p\in S_m} \text{sign}(p) a_{1,p(1)} a_{2,p(2)}, \dots, a_{m,p(m)}$$

2. **a)** Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix von Hand, ohne die Gauss-Elimination zu verwenden:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie dazu $\mathbf{M}$ geschickt in die richtige Form und benutzen Sie den Satz aus der vorherigen Aufgabe 1.

Bitte wenden!

3. **a)** Zeigen Sie, dass die Determinante einer orthogonalen Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nur die Werte $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$ annehmen kann.

b) Nicht jede reelle quadratische Matrix mit einer Determinante von ± 1 ist orthogonal. Geben Sie ein geeignetes Beispiel $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ für diese Aussage an.

c) Zeigen Sie, dass eine unitäre Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Eigenschaft $|\det \mathbf{Q}| = 1$ erfüllt.

4. **a)** Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix singulär?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir wissen, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix einfach zu berechnen ist. Zudem ändert sich die Determinante nicht, wenn ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird. Dies erlaubt die effiziente Bestimmung der Determinante einer beliebigen Matrix mittels Gauss-Elimination oder LR-Zerlegung.
Bestimmen Sie die Determinante von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

indem Sie die Gauss-Elimination von Hand durchführen.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir definieren die zwei Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & -1 \\ -b & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

b) Für eine schiefsymmetrischen Matrix gilt: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

Gibt es eine allgemeine Aussage, die für die Determinante von schiefsymmetrischen Matrizen zutrifft? Falls ja, formulieren Sie diese und versuchen Sie mit Hilfe dieser, die Determinante folgender zwei Matrizen zu berechnen:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 1 \\ -a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Bonusaufgabe

Gegeben seien drei Matrizen $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit den Eigenschaften:

- $\mathbf{A}$ ist regulär mit $\det(\mathbf{A}) = 16$
- $\det(\mathbf{AB}) = 2$
- $\mathbf{BC}$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar

Berechnen Sie:

a) $\det(\mathbf{CA})$

b) $\det(-\mathbf{AB}^{-1})$

c) $\det(\mathbf{A}^\top\mathbf{B})$

d) $\det(\mathbf{BC} - \mathbf{AB}^{-1}\mathbf{C})$

e) $\det(\mathbf{B} + \mathbf{B})$

Bitte wenden!

7. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $a_{ij} = ij$ und $n > 1$.
Welche Aussage ist richtig?

(a) $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = 0$

(b) $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = 1$

(c) $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = -1^n$

(d) $\mathsf{det}\ \mathbf{A} = -2^n$

2. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ korrekt?

(a) $\mathsf{det}\ (2\mathbf{A}) = 2\,\mathsf{det}\ (\mathbf{A})$

(b) $\mathsf{det}\ (\mathbf{A}^4) = (\mathsf{det}\ (\mathbf{A}))^4$

(c) Sei $\mathbf{A}$ eine Dreiecksmatrix mit der Eigenschaft $a_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$ (rechts unten stehen also Nullen). Die Determinante lässt sich mit der Formel $\mathsf{det}\ (\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \dots a_{n,1}$ berechnen.

(d) $\mathsf{det}\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathsf{det}\ (\mathbf{A}) + \mathsf{det}\ (\mathbf{B})$

(e) $\mathsf{det}\ (\mathbf{AB}) = \mathsf{det}\ (\mathbf{BA})$

(f) Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, dann ist auch $\mathbf{AB}$ singulär.

(g) $\mathsf{det}\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathsf{det}\ (\mathbf{A})^3$

3. Gegeben sei die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{3 \times 3}$ deren Einträge natürliche Zahlen sind und für die gilt, dass alle Einträge entweder nur einmal vorkommen oder Null sind. Welche der folgenden Möglichkeiten kommen für den Wert der Determinante $\mathsf{det}\ (\mathbf{A})$ in Frage?

(a) 5

(b) 6

(c) -2

(d) 35

Abgabe: Bis 15:00 Uhr, Freitag 11. Dezember 2020

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`