Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

# Musterlösung 12

**1.** Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass wenn $n > 1$ und $\text{Rang } \mathbf{A} = 1$, es einen Eigenwert 0 mit $n-1$ geometrischer Vielfachheit gibt. Die algebraische Vielfachheit ist immer grösser gleich der geometrischen Vielfachheit. Damit sieht das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ wie folgend aus:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 0)^{n-1}(b \cdot \lambda + c)$$

mit $b, c \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe unseres Wissens über das charakteristische Polynom aus der Vorlesung schliessen wir, dass $c = \text{Spur } \mathbf{A} \cdot (-1)^{n-1}$. Da $\text{Spur } \mathbf{A} \neq 0$ ist, muss es einen weiteren Eigenwert $\neq 0$ geben. Sein geometrisches Vielfaches ist 1. Damit haben wir $n$ linear unabhängige Eigenvektoren und $\mathbf{A}$ ist somit diagonalisierbar.

**2.** Damit eine Matrix über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ und hat keine komplexen Nullstellen.
- Die geometrische und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte stimmen überein. Es ist also zu überprüfen, ob die Dimension der einzelnen Eigenräume jeweils mit der Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle (= Eigenwert) im charakteristischen Polynom übereinstimmt.

Bei der Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms sehen wir, dass nur für die Werte $a = b = c = 0$ reelle Eigenwerte existieren, bzw. das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

$$\chi(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & a & b \\ -a & -\lambda & c \\ -b & -c & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - abc + abc - a^2\lambda - b^2\lambda - c^2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + (a^2 + b^2 + c^2))$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_{2,3} = \sqrt{-(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Für $a = b = c = 0$ haben wir $\lambda_{1,2,3} = 0$ und somit die algebraische Vielfachheit 3. Da der Eigenraum zu dem Eigenwert 0 der ganze $\mathbb{R}^3$ ist, ist auch die geometrische Vielfachheit 3 und somit die Nullmatrix diagonalisierbar.

**3.**
- Wenn $k$ ein Eigenwert und $\mathbf{x}$ der dazu gehörende Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist, gilt $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^3)\mathbf{x} = (\lambda^2 - \lambda^3)x = 0x$. Somit ist $\lambda^2 - \lambda^3 = 0$ und $\lambda = 1$ oder $0$.

**Bitte wenden!**

- Für die hermitesche Matrix $\mathbf{A}$ ist die Eigenwertzerlegung definiert und wir haben

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^n = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-}1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{V}^{-1}.$$

  Wobei $\mathbf{\Lambda}$ nur die Werten $0$ und $1$ auf der Diagonale hat. Da $\mathbf{A}^2 = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{V}^{-1}$ und $0^2 = 0, 1^2 = 1$, erhalten wir wieder das gleiche $\mathbf{\Lambda}$ und damit ist $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

**4.** Es werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gesucht

$$\begin{aligned}\mathsf{det}\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix} - \lambda\mathbb{I}\right) &= 0\\ \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 &= 0\\ \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda &= 0\\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= 1 \pm 1\end{aligned}$$

Eigenvektoren durch einsetzen, z.B.:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix} - \lambda_1\mathbb{I}\right)\mathbf{v}_1 = 0.$$

Es ergibt sich für die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}.$$

Alle vielfachen dieser Vektoren sind natürlich auch gültige Lösungen.

**5.** Für die Determinante $\det$ und zwei reguläre Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelten folgende Rechenregeln (siehe Vorlesungsnotizen/Skript):

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.

Desweiteren entspricht die Determinante einer Diagonalmatrix dem Produkt der Diagonalelemente. Insgesammt folgt also:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^{-1})\\ &= \det(\mathbf{V})\det(\Sigma)\det(\mathbf{V}^{-1})\\ &= \det(\mathbf{V})\det(\Sigma)\det(\mathbf{V})^{-1}\\ &= \det(\Sigma) = \lambda_1 * \cdots * \lambda_n.\end{aligned}$$

**6.** **a)** Durch Einsetzen der Eigenwertzerlegung ergibt sich

$$\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Die Matrix $\mathbf{V}$ ist orthonormal, da die Inverse in der Eigenwertzerlegung durch $\mathbf{V}^\top$ ersetzt werden konnte (dies folgt auch direkt aus der Symmetrie der Matrix). Da die Matrix $\mathbf{A}$ regulär ist, sind alle Eigenwerte ungleich 0 und die Diagonalmatrix damit einfach invertierbar indem alle Diagonalemente invertiert werden. Indem wir die Gleichung nacheinander mit $\mathbf{V}^\top$, $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ und $\mathbf{V}$ von links multiplizieren erhalten wir also

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V\Lambda V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
\Rightarrow&\mathbf{\Lambda V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{V}^\top\mathbf{b}\\
\Rightarrow&\mathbf{V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^\top\mathbf{b}\\
\Rightarrow&\mathbf{x} = \mathbf{V}\Lambda^{-1}\mathbf{V}^\top\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Die Laufzeit der Multiplikation eines Vektors aus $\mathbb{R}^n$ mit einer $n \times n$ Matrix ist in $\mathcal{O}(n^2)$. Die rechte Seite der Gleichung kann ausgewertet werden, indem man den den Vektor $\mathbf{b}$ zuerst mit $\mathbf{V}^\top$ dann mit $\Lambda^{-1}$ und $\mathbf{V}$ multipliziert. Damit lässt sich die Lösung $\mathbf{x}$ in $\mathcal{O}(n^2)$ bestimmen.

**b)** In der vorherigen Teilaufgabe wurde die Inverse bereits konstruiert. Es gilt nämlich

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

da $\mathbf{A}$ regulär ist. Damit gilt auch

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\Lambda^{-1}\mathbf{V}^\top.$$

Dies lässt sich auch durch Multiplikation mit der Eigenwertzerlegung von $\mathbf{A}$ zeigen.

**c)** Für den Fall das die Matrix $\mathbf{B}$ nicht regulär ist, existiert mindestens ein Eigenwert gleich Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir, dass die Eigenwerte absteigend sortiert sind

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Damit lässt sich die Matrix $\Sigma$ nicht invertieren. Verwenden wir die Substitutionen $\mathbf{y} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{V}^\top\mathbf{b}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V\Lambda V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
\Rightarrow&\mathbf{\Lambda V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{V}^\top\mathbf{b}\\
\Rightarrow&\mathbf{\Lambda y} = \mathbf{c}\\
\Rightarrow&\begin{pmatrix}\lambda_1 y_1\\ \vdots\\ \lambda_r y_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da es eine Lösung gibt folgt, dass $c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$ gilt. Darüber hinaus können auch die Werte $y_{r+1}, \cdots, y_n$ gleich Null gewählt werden. Wir erhalten also eine Lösung indem wir die Matrix

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{c}$ multiplizieren: $\mathbf{y} = \Sigma^+ \mathbf{c}$. Durch Verwendung der Substitutionsregel ergibt sich also

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\top \mathbf{x} &= \Sigma^* \mathbf{V}^\top \mathbf{b} \\ \Rightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{V} \Sigma^* \mathbf{V}^\top \mathbf{b} \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{B}^*$ ist also gegeben durch $\mathbf{V}\Sigma^*\mathbf{V}^\top$.

**7.** **a)** Da die Vektoren orthonormiert sind, lässt sich die Matrix durch ausmultiplizieren berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^\top \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -15 & 24 & 24 \\ 24 & 48 & -60 \\ 24 & -60 & 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**b)** Die Determinante ergibt sich als Produkt der Eigenwerte und ist damit 0.

**c)** Der gegebene Vektor ist das 18-fache von $\mathbf{v}_3$ und damit Teil des Eigenraumes zum Eigenwert 0. Alternativ kann der Vektor mit der in a) konstruierten Matrix multipliziert werden.

**8.** Multiple-Choice-Aufgabe

**1.** Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$). Ausserdem seien $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\mathbf{A}^2$ hat mindestens einen Eigenwert mit strikt positivem Imaginärteil.

Nach Satz 9.15 haben symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte, und es ist einfach zu sehen, dass $\mathbf{A}^2$ symmetrisch ist.

√ (b) Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

Da $\mathbf{A}$ positiv definit ist, gilt $0 < \mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}$ für alle Spaltenvektoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Seien nun wie in Satz 9.15 $\mathbf{U}$ die Diagonalisierungsmatrix, $\mathbf{\Lambda} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ und sei $\mathbf{e}_j$ ein Einheitsvektor. Wir setzen $\mathbf{v} := \mathbf{U}\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$ und sehen ein, dass $0 < \mathbf{e}_j^\top \underbrace{\mathbf{U}^\top\mathbf{A}\mathbf{U}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{e}_j = \lambda_j$. Hier verwenden wir, dass für eine Matrix $\mathbf{B}$ der Diagonaleintrag $b_{jj}$ genau dem Wert $\mathbf{e}_j^\top\mathbf{B}\mathbf{e}_j$ entspricht.

(c) $\mathbf{A}$ hat mindestens einen Eigenwert, dessen geometrische Vielfachheit strikt kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.

Nach Satz 9.15 ist $A$ diagonalisierbar und nach Satz 9.14 müssen somit die Vielfachheiten übereinstimmen.

(d) Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$ falls $i \neq j$.

$\mathbf{A}$ symmetrisch und positiv definit impliziert nicht, dass die Eigenwerte paarweise verschieden sind. Das einfachste Beispiel ist die Identitätsmatrix.

√ (e) Es gibt eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass $\mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v} \geq \alpha\, \mathbf{v}^\top\mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Da die Eigenvektoren eine orthogonale Basis bilden, können wir schreiben $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n a_j\mathbf{v}_j$ für Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v} &= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_j a_i \mathbf{v}_j^\top\mathbf{A}\mathbf{v}_i \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \lambda_i a_j a_i \underbrace{\mathbf{v}_j^\top\mathbf{v}_i}_{=0 \text{ if } j\neq i} \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^2 \mathbf{v}_j^\top\mathbf{v}_j \\
&\geq \underbrace{\min_j(\lambda_j)}_{=:\alpha>0} \sum_j (a_j\mathbf{v}_j)^\top(a_j\mathbf{v}_j) \\
&= \alpha\mathbf{v}^\top\mathbf{v}\ .
\end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

**2.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a) Wenn $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ $n \times n$ Matrizen sind und $\mathbf{P}$ invertierbar ist mit $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$, dann gilt auch $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

$\det \mathbf{A} = \det (\mathbf{PBP}^{-1}) = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{P}^{-1} = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{P}^{-1} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}$

$\surd$ (b) Falls das Charakteristische Polynom von einer $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ durch $p(\lambda) = (\lambda - 1)^n + 2$ gegeben ist, dann ist $\mathbf{A}$ invertierbar.

Wir haben $p(0) = (-1)^n + 2 \neq 0$. Somit ist 0 kein Eigenwert von $\mathbf{A}$.

$\surd$ (c) Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^2$ zwei $n \times n$ Matrizen sind und $\mathbf{A}^2$ reguläre, dann ist $\mathbf{A}^3$ invertierbar.

Da $\mathbf{A}^2$ regulär und somit auch inverierbar ist, haben wir $\det (\mathbf{A}^2) = \det (\mathbf{A})^2 \neq 0$ und somit auch $\det (\mathbf{A})^3 = \det (\mathbf{A}^3) \neq 0$.

(d) Falls $\mathbf{A}$ eine $3 \times 3$ Matrix mit $\det \mathbf{A} = 7$ ist, dann gilt auch $\det (2\mathbf{A}^\top \mathbf{A}^{-1}) = 2$.

Mit $\det (\mathbf{A}^\top) = \det (\mathbf{A})$ haben wir $\det (2\mathbf{A}^\top \mathbf{A}^{-1}) = \det (2\mathbf{I}) \cdot \det (\mathbf{A}^\top) \cdot \det (\mathbf{A}^{-1}) = \det (2\mathbf{I}) \cdot \det (\mathbf{A}) \cdot \det (\mathbf{A}^{-1}) = \det (2\mathbf{I}) = 8$.

(e) Falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A} \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_1$ und $\mathbf{w}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_2$ ist, dann ist $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_1 + \lambda_2$.

Sei z.B. $\mathbf{A}$ eine $2 \times 2$ Identitätsmatrix, dann ist der einzige Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich 1.