D-INFK
Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Lineare Algebra

HS 2020

Serie 12

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \mathsf{Rang}\ (\mathbf{A}) = 1,\ \mathsf{Spur}\ (\mathbf{A}) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist.

2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ nur dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, falls gilt $a = b = c = 0$.

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3$.

- Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ nur die Eigenwerte 0 oder 1 hat.
- Zeigen Sie, dass wenn $\mathbf{A}$ eine Hermitesche Matrix ist, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ gelten muss.

4. Gegeben ist die Hermitesche Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und dazugehörende Eigenvektoren.

5. Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es existiert also eine Zerlegung der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1},$$

wobei $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix ist. Zeigen Sie, dass sich die Determinante von $\mathbf{A}$ als Produkt der Diagonalelemente von Λ schreiben lässt:

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n.$$

Bitte wenden!

6. Bonusaufgabe

Gegeben sei eine symmetrische, reguläre Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^\top.$$

a) Zeigen Sie, wie man ein Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ effizient unter Verwendung der Eigenwertzerlegung lösen kann. *Effizient* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Algorithmus eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$ im Gegensatz zur Gausselimination mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^3)$ hat.

b) Zeigen Sie, wie man mithilfe der Eigenwertzerlegung die Inverse bestimmen kann.

c) Nehmen wir an, die reelle Matrix $\mathbf{B}$ ist symmetrisch und besitzt damit eine Eigenwertzerlegung, ist aber nicht regulär. Desweiteren hat das Gleichungssystem $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mindestens eine Lösung. Beschreiben Sie die Konstruktion einer Matrix $\mathbf{B}^*$ mithilfe der Eigenwertzerlegung, sodass $\mathbf{x}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{b}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie sich der Lösungsraum eines unterbestimmten Gleichungssystems darstellen lässt. Versuchen Sie den Ansatz aus Aufgabenteil **b)** geeignet zu erweitern.

7. Gegeben sind die orthonormierten Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0.$$

a) Konstruieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$, die die angegebene Eigenwertzerlegung besitzt.

b) Geben Sie die Determinante der Matrix an.

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}^\top$ Teil des Kerns von $\mathbf{A}$ ist.

Siehe nächstes Blatt!

8. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgabe.

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$). Ausserdem seien $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\mathbf{A}^2$ hat mindestens einen Eigenwert mit strikt positivem Imaginärteil.

(b) Es gilt $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

(c) $\mathbf{A}$ hat mindestens einen Eigenwert, dessen geometrische Vielfachheit strikt kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.

(d) Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_j \neq \lambda_i$ falls $i \neq j$.

(e) Es gibt eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass $\mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v} \geq \alpha\,\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Wenn $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ $n \times n$ Matrizen sind und $\mathbf{P}$ invertierbar ist mit $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$, dann gilt auch $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

(b) Falls das Charakteristische Polynom von einer $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ durch $p(\lambda) = (\lambda - 1)^n + 2$ gegeben ist, dann ist $\mathbf{A}$ invertierbar.

(c) Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^2$ zwei $n \times n$ Matrizen sind und $\mathbf{A}^2$ reguläre, dann ist $\mathbf{A}^3$ invertierbar.

(d) Falls $\mathbf{A}$ eine 3×3 Matrix mit $\det \mathbf{A} = 7$ ist, dann gilt auch $\det\left(2\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\right) = 2$.

(e) Falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A} \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit zugehörigem Eigenwert λ_1 und $\mathbf{w}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenwert λ_2 ist, dann ist $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_1 + \lambda_2$.

Abgabe: Bis 15:00 Uhr, Freitag 18. Dezember 2020

http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/