Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Musterlösung 13

1. Die Matrix $\mathbf{A} \pm \mathbf{I}$ ist singulär falls es einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gibt der die Gleichung $(\mathbf{A} \pm \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erfüllt, d.h. wenn $\mathbf{A} \pm \mathbf{I}$ als lineare Abbildung einen nicht trivialen Kern hat. Durch Umformen

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \pm \mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{x} &= \mathbf{0}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \pm\mathbf{x}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}\end{aligned}$$

sehen wir, dass dies genau dann zutrifft, wenn $\mathbf{A}$ mindestens einen Eigenwert $\lambda = \pm 1$ hat.

Da $\mathbf{A}$ eine orthogonale Matrix ist und damit längentreu ($\|Ax\|_2 = \|x\|_2$), wissen wir, dass die Eigenwerte den (komplexen) Betrag 1 haben müssen. Sie sind aber nicht zwingend reell! Komplexwertige Nullstellen des Charakteristischen Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer paarweise auf, und zwar ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle. Somit muss eine orthogonale Matrix von ungerader Dimension mindestens einen reellen Eigenwert ± 1 besitzen.

Für die orthogonale Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

haben wir reelle Eigenwerte mit dem Wert 1 und -1. Somit sind $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ und $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ singulär.

2. **a)** Sei $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zu dem Eigenwert λ. Dann gilt:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}(\mathbf{M} + c\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{M}\mathbf{x} + c\mathbf{x}\\ &= \lambda\mathbf{x} + c\mathbf{x}\\ &= (\lambda + c)\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda + c$ ein Eigenwert von $\mathbf{M} + c\mathbf{I}$ und $\mathbf{x}$ der dazugehörende Eigenvektor.

b) Es sei $\mathbf{A} = \mathbf{B} + 2\mathbf{I}$, wobei $\mathbf{I}$ die 6×6 Identitätsmatrix ist. Somit ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Da alle Zeilen gleich sind, ist die Matrix singulär und somit sicher einer der Eigenwerte von $\mathbf{B}$ gleich Null. Die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts (oder die Dimension des Kerns von $\mathbf{B}$) können wir mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen finden:

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir für $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$.

$$x_1 = -3x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 9x_5 - 11x_6.$$

Damit erhalten wir alle dazugehörigen Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die geometrische Vielflachheit von $\lambda_{\mathbf{B}} = 0$ ist deshalb 5. Einen weiteren Eigenwert finden wir durch genaues Hinschauen, denn mit $\mathbf{v} = \mathbf{1}$ ($v_i = 1, \forall i$) haben wir $\mathbf{Bv} = 36\mathbf{v}$. Da die Summe der algebraischen Vielfachheit aller Eigenwerte maximal 6 sein kann, haben wir somit schon alle Eigenwerte und die dazugehörenden Eigenvektoren von $\mathbf{B}$ gefunden.

Wir wissen nun aus **a)**, dass mit $\mathbf{A} = \mathbf{B} + c\mathbf{I}$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gleich den Werten von $\lambda_{\mathbf{B}} + c$ sind. Somit sind diese gleich 2, 38. Die Eigenvektoren zu 2 haben folgenden Form:

$$x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Die Eigenvektoren zu 38 haben diese Form:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0$$

3. **a)** Singulärwerte sind nicht negativ. Aus diesem Grund stellt $\mathbf{V\Lambda V}^\top$ keine Singulärwertzerlegung da.

b) Es gilt $\mathbf{A}^{23} = \mathbf{V\Lambda}^{23}\mathbf{V}^\top$. Der Rang der Matrix verändert sich durch das exponenzieren nicht und es gilt

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}^{23}) = 2.$$

c) Das negative Diagonalelement lässt sich entfernen, indem man ihn durch 1 ersetzt und dafür die zweite Spalte in der ersten Matrix mit -1 multipliziert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^\top \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^\top \\
&= \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top
\end{aligned}$$

Diese Zerlegung erfüllt alle definierenden Eigenschaften der Singulärwertzerlegung. Die Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ sind orthogonal und die Diagonalmatrix Σ enthält nur nicht-negative Einträge. Die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^\top$$

ist ebenfalls eine gültige Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A}$.

4. Unter der Annahme, dass sich $\mathbf{A}^k$ darstellen lässt als $\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\Lambda^k\mathbf{V}^\top$, ergibt sich

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda^k \underbrace{\mathbf{V}^\top\mathbf{V}}_{\mathrm{I}} \Lambda\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}\Lambda^{k+1}\mathbf{V}^\top$$

Da die Annahme für $k = 1$ gültig ist, ist sie somit für beliebige $k > 0$ durch vollständige Induktion bewiesen.

Bitte wenden!

Desweiteren sieht man durch ausklammern:

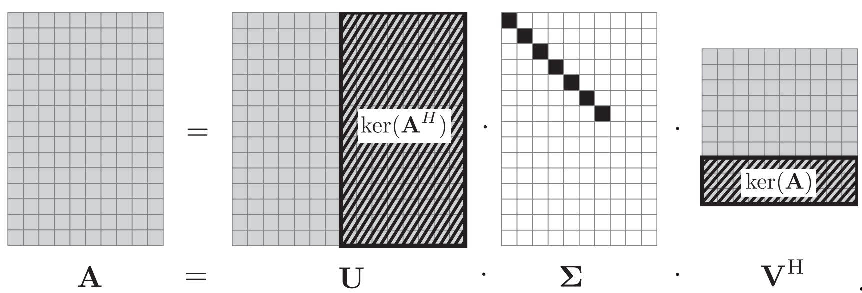
$$\begin{aligned} a\mathbf{A}^k + b\mathbf{A}^l &= \mathbf{V}\mathbf{a}\Lambda^k\mathbf{V}^\top + \mathbf{V}\mathbf{b}\Lambda^l\mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{V}(a\Lambda^k + b\Lambda^l)\mathbf{V}^\top \end{aligned}$$

Für ein beliebiges Polynom $\pi(\mathbf{A}) = a_n\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A}$ gilt damit

$$\begin{aligned} &a_n\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} \\ =&a_n\mathbf{V}\Lambda^n\mathbf{V}^T + a_{n-1}\mathbf{V}\Lambda^{n-1}\mathbf{V}^T + \cdots + a_1\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\ =&\mathbf{V}(a_n\Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + a_1\Lambda)\mathbf{V}^\top \\ =&\mathbf{V}\mathrm{diag}(\pi(\lambda_1), \ldots, \pi(\lambda_n))\mathbf{V}^\top. \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage.

5. a) Die Kerne lassen sich in den markierten Kästchen finden.



Sei $\mathbf{v}$ ein Vektor der sich als Linearkombination der Vektoren in den markierten Zeilen darstellen lässt. Multipliziert man den Vektor mit der Singulärwertzerlegung $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$, multipliziert man zunächst mit $\mathbf{V}^H$ und es ergibt sich

$$\mathbf{V}^H\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}^\top$$

da $\mathbf{V}^H$ orthogonal ist. Multipliziert man diesen Vektor nun mit Σ ergibt sich $\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{v} = \mathbf{0}$, da die letzten drei Spalten von Σ nur Nullen enthalten. Damit ist auch das gesammte Produkt $\mathbf{A}\mathbf{v}$ gleich Null. Da der Raum aller möglichen Vektoren $\mathbf{V}$ die gleiche Dimension wie der Kern hat und alle Elemente auf den Nullvektor abgebildet werden, wird der Kern durch die markierten Zeilen aufgespannt. Für $\mathbf{A}^H$ folgt das Argument analog imdem man die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^H = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{U}^H$$

betrachtet.

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Matrix ist symmetrisch und hat daher eine Eigenzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^\top$. Induktiv lässt sich zeigen, dass

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\Sigma^n\mathbf{V}^\top$$

gilt. Für $n = 1$ entspricht das der Eigenzerlegung. Für $n + 1$ haben wir

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^\top\mathbf{V}\Sigma^n\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}\Sigma\Sigma^n\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}\Sigma^{n+1}\mathbf{V}^\top.$$

Die Matrix Σ^n ist dabei jeweils eine Diagonalmatrix, bestehend aus den $n-$ten Potenzen der Eigenwerte. Für gerades n, also $n = 2k$, existiert damit eine Eigenzerlegung von $\mathbf{A}^n$ mit nicht negativen Eigenwerten.

c) Gesucht sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\mathrm{I}\right) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Die Eigenwerte ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1.$$

6. Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ simultan diagonalisierbar, so haben sie die gleichen Eigenvektoren und es existieren die Zerlegungen

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{V}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \quad \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{V}^{-1}.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_A\underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}}_{\mathrm{I}}\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{V}^{-1} \qquad \longleftarrow \text{Diagonalmatrizen kommutieren.} \\
&= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_B\underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}}_{\mathrm{I}}\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{BA}
\end{aligned}$$

Damit kommutieren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

7. **a)** Das kommutative Diagramm ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{A}^k"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] & \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{E}^n \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}^{-1}"] \\
& & \cdots & \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{\Lambda}^k"'] \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"] & \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"] & \cdots \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] & \mathbb{E}^n \arrow[u, shift left, "\mathbf{V}"]
\end{tikzcd}$$

Bitte wenden!

Die Formel für $\mathbf{A}^k$ kann einfach abgelesen werden und ist

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

Dieselbe Formel erhält man auch durch direktes Einsetzen der Spektralzerlegung $\mathbf{A}^k = (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}$, da $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$ jeweils wegfällt.

b) Aus Teilaufgabe a) ist direkt ersichtlich, dass

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_{k-1} = \mathbf{A}^k\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}_0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}_k = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_k}{\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|}.$$

Der Startvektor $\mathbf{a}_0$ kann als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i.$$

So erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}^k\sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{A}^k\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i^k\mathbf{v}_i$$

wobei wir genutzt haben, dass $\mathbf{v}_i$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}$ zum Eigenwert λ_i^k ist. Jetzt klammern wir den dominierenden Eigenwert λ_1 aus

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \lambda_1^k\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_i = \lambda_1^k\left(b_1\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i\ell_i^k\mathbf{v}_i\right)$$

Für $i \geq 2$ haben wir $\ell_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}$ gesetzt und da $|\lambda_i| < |\lambda_1|$, gilt $|\ell_i| < 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \ell_i^k = 0$. D.h. für $k \to \infty$ ist der unnormierte Vektor $\tilde{\mathbf{a}}_k = \lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1$ und der normierte Vektor wird zu

$$\mathbf{a}_k = \frac{\lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1}{\|\lambda_1^k b_1\mathbf{v}_1\|} = \frac{\lambda_1^k b_1}{|\lambda_1^k b_1|}\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = c\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

wobei c eine möglicherweise komplexe Zahl mit Betrag $|c| = 1$ ist.

Die Folge $\mathbf{a}_k$ liefert also im Limit $k \to \infty$ einen normierten Eigenvektor zum dominierenden Eigenwert λ_1. Wir erkennen ebenfalls, dass das Verfahren nicht funktioniert, wenn die Koordinate b_1 gleich Null ist. Für einen zufällig gewählten Startvektor $\mathbf{a}_0$ ist das aber sehr unwahrscheinlich.

Siehe nächstes Blatt!

8. **a)** Für den ersten Ausschank erhalten wir

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1/7 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren $\mathbf{T}^{(i)}$ sind ähnlich: Wobei die Kolonne mit $1/7$ sich in der i-ten statt ersten Spalte befindet.

b)

$$\mathsf{det}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathsf{det}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^T \stackrel{8.3}{=} \mathsf{det}\,((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^T) = \mathsf{det}\,(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Da sich das charakteristische Polynom für $\mathbf{A}^T$ nicht verändert, haben wir die selben Eigenwerte wie für $\mathbf{A}$.

c) Mit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1111111\end{pmatrix}^T$, gilt für alle $i = 1, ..., 7$ $\mathbf{T}^{(i)^T}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Damit gilt auch $\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{T}^{(1)^T} \cdots \mathbf{T}^{(7)^T}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Insbesondere ist 1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}^T$ und somit auch von $\mathbf{A}$.

d)

```
A = eye(7);
for i = 1:7
    Ti = eye(7);
    Ti(:,i) = 1/7 * ones(7,1);
    A = Ti*A;
end

A =
  0.31831      0.27852      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.17546      0.27852      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.15505      0.13567      0.24371      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.13172      0.11526      0.10085      0.21324      0.18659      0.16327      0.14286
  0.10507     0.091934     0.080443     0.070387      0.18659      0.16327      0.14286
 0.074604     0.065279     0.057119     0.049979     0.043732      0.16327      0.14286
 0.039789     0.034815     0.030463     0.026656     0.023324     0.020408      0.14286

x = null(A-eye(7))
x =

     -0.59161
     -0.50709
     -0.42258
     -0.33806
     -0.25355
     -0.16903
    -0.084515

x = 3/sum(x) * x
x =
         0.75
      0.64286
      0.53571
      0.42857
      0.32143
      0.21429
      0.10714
```

Bitte wenden!

9. Multiple-Choice-Aufgaben

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A}^3 = \mathrm{I}$.

√ (a) Die lineare Abbildung zur Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ ist in jedem Fall injektiv.

√ (b) Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}^2\mathbf{v}$ entweder ein Eigenvektor der Abbildung $\mathbf{A}$ zum Eigenwert 1 oder der Nullvektor.

(c) Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis ist und die Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so gilt $n \leq m$.

2. Eine normierte Eigenzerlegung einer Matrix ist die Menge ihrer Eigenwerte mit zugehörigen normierten Eigenvektoren. Zwei Zerlegungen, die sich nur durch ihre Reihenfolge unterscheiden, betrachten wir als identisch.

(a) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

(b) Eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

(c) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

√ (d) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten hat 2^n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.