Ana Cannas
Olga Sorkine-Hornung

Serie 13

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, wobei n ungerade ist. Zeigen Sie, dass entweder $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ oder $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ singulär sein muss. Können beide für das selbe $\mathbf{A}$ singulär sein? Geben Sie ein Beispiel falls dies der Fall ist, oder beweisen Sie das Gegenteil wenn nicht. Hinweis: Ein Polynom von ungeradem Grad hat immer mindestens eine reelle Nullstelle.

2. **a)** Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von $\mathbf{M}$, $\lambda + c$ ein Eigenwert von $\mathbf{M} + c\mathbf{I}$ ist, wobei $\mathbf{I}$ die entsprechende Identitätsmatrix darstellt.

b) Finden Sie nun mit Hilfe der Annahme aus **a)** alle Eigenvektoren und die dazugehörenden Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 5 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 7 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

3. Die Eigenwertzerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ sei gegeben durch $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^\top$ mit

$$\mathbf{V} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Warum ist die Eigenwertzerlegung in diesem Fall nicht auch gleichzeitig eine Singulärwertzerlegung?

b) Wie lautet der Rang der Matrix $\mathbf{A}^{23}$?

c) Konstruieren Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A}$. Die Singulärwertzerlegung kann ausgehend von den Matrizen $\mathbf{V}$ und Λ gebildet werden.

4. Gegeben sei die symmetrische, reelle Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^\top$ und ein matrixwertiges Polynom π

$$\pi(\mathbf{A}) = a_m\mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathbf{A}.$$

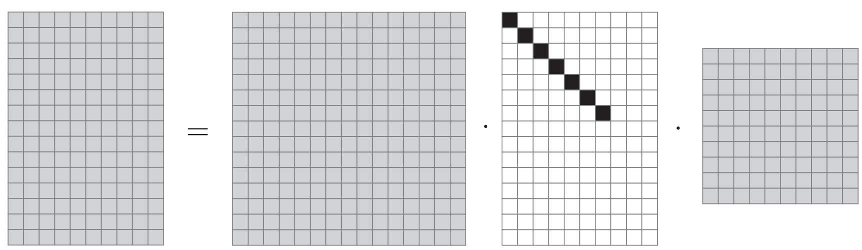
Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sind wie üblich die Diagonalelemente der Matrix Λ. Zeigen Sie, dass sich die Matrix $\pi(\mathbf{A})$ für beliebige reelle Koeffizienten $a_1, ..., a_n$ in der Form

$$\pi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}\ \mathrm{diag}(\pi(\lambda_1), \cdots, \pi(\lambda_n))\ \mathbf{V}^\top$$

darstellen lässt, wobei $\mathrm{diag}(x_1, x_2, ..., x_n)$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $x_1, x_2, ..., x_n$ liefert.

Bemerkung: π ist zwar im Allgmeinen matrixwertig, kann aber auch auf reelle Zahlen angewendet werden. $\mathbb{R}$ kann als $\mathbb{R}^{1\times 1}$ interpretiert werden.

5. a) Die Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{15\times 10}$ kann graphisch folgendermassen dargestellt werden:



$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{H}} .$$

Dabei entsprechen die grauen Kästchen Zahlen aus $\mathbb{C}$, die schwarzen stehen für reelle Zahlen > 0 und die weissen entsprechen der Zahl 0. An einer Singulärwertzerlegung dieser Form, lässt sich eine Basis des Kerns sowohl von $\mathbf{A}$ als auch von $\mathbf{A}^H$ ablesen. Markieren Sie die Kästchen, in denen sich die entsprechenden Vektoren befinden. Bitte machen Sie deutlich welche Markierung zu welchem Kern gehört.

b) Für die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}^{2k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ nicht negativ sind.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Werten Sie dazu die Nullstellen des charakterischen Polynoms aus.

6. Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nennt man simultan diagonalisierbar, wenn sie beide diagonalsierbar sind und die gleichen Eigenvektoren besitzen. Zeigen Sie, dass simultan diagonalisierbare Matrizen kommutieren, d.h. es gilt $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Sei $\mathbf{A}$ eine diagonalisierbare Matrix und dessen Eigenwertzerlegung gegeben durch $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$.

a) Zeichnen Sie ein kommutatives Diagramm (analog zur Abbildung 5.48 im Skript) für die Abbildungsmatrix

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}$$

welches insbesondere diese Abbildung in der Eigenbasis darstellt.

Drücken Sie $\mathbf{A}^k$ als Funktion der Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ und der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ aus, wobei $\mathbf{\Lambda}$ aus den Eigenwerten λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ besteht.

b) Nehmen wir an, dass es einen dominierenden Eigenwert λ_1 gibt (d.h. $\forall i \neq 1 : |\lambda_1| > |\lambda_i|$). Gegeben sei ein zufälliger Vektor $\mathbf{a}_0$ und die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1}}{\|\mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1}\|}.$$

Iteriert man diese Vorschrift genügend lange, so entspricht $\mathbf{a}_k$ einem zum dominanten Eigenwert zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_1$. Zeigen Sie, warum dies der Fall ist. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

1. Formulieren Sie zuerst den unnormierten Vektor der k-ten Iteration $\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$ in Abhängigkeit von $\tilde{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{a}_0$ und $\mathbf{A}$.
2. Drücken Sie danach den Startvektor $\mathbf{a}_0$ in der Eigenbasis aus, d.h. wir setzen $\mathbf{a}_0 = \mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 b_1 + \mathbf{v}_2 b_2 + \cdots + \mathbf{v}_n b_n$.
3. Leiten Sie eine Formel für $\tilde{\mathbf{a}}_k$ in Abhängigeit der Eigenwerte her.
   Tipp: Starten Sie zuerst mit $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0$ und $\tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_1$ und schliessen Sie dann auf beliebige k.
4. Klammern Sie den dominanten Eigenwert aus und untersuchen Sie, was für $k \to \infty$ passiert.

Die verbleibenden Schritte sollten dann direkt aus dem gegebenen Ansatz folgen.

(Anmerkung: Das hier beschriebene Verfahren funktioniert nicht, wenn der Startvektor $\mathbf{a}_0$ orthogonal zum Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ ist. Da $\mathbf{a}_0$ zufällig gewählt wird, sind diese Vektoren mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht-orthogonal. Sie können annehmen, dass das der Fall ist.)

Bitte wenden!

8. Um einen Tisch sitzen 7 Zwerge. Vor jedem steht ein Becher. Einige der Becher enthalten Milch, insgesamt 3 Liter. Einer der Zwerge verteilt seine Milch gleichmässig auf alle Becher (inklusive seinem eigenen, sprich $1/7$ pro Becher). Danach tut sein rechter Nachbar dasselbe. Genauso verfährt der nächste rechts herum u.s.w. Nachdem der 7. Zwerg seine Milch gleichmässig verteilt hat, ist in jedem Becher wieder soviel Milch wie am Anfang. Wie viel Milch war anfangs in jedem Becher?

Seien

$$x_1^{(0)}, ..., x_7^{(0)} \qquad \text{die Milchmengen am Anfang}$$

und

$$x_1^{(1)}, ..., x_7^{(1)} \qquad \text{nach dem ersten Ausschank.}$$

Dann kann der erste Ausschank als lineare Abbildung dargestellt werden:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}.$$

Allgemein wird der i-te Ausschank durch die Transformation

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)}\mathbf{x}^{(i-1)},$$

beschrieben.
Für den Endzustand haben wird

$$\mathbf{x}^{(7)} = \mathbf{T}^{(7)}\mathbf{T}^{(6)}...\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)}$$

und da $\mathbf{x}^{(7)} = \mathbf{x}^{(0)}$ ist, erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

a) Überlegen Sie sich als Erstes wie die Matrix $\mathbf{T}^{(i)}$ aussieht?

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ gleich den Eigenwerten ihrer Transponierten $\mathbf{A}^T$ sind. Benutzen Sie dazu Satz 8.9 aus dem Skript.

c) Mit Hilfe von **b)**, zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}$ wirklich einen Eigenwert $\lambda = 1$ hat. Hinweis: betrachten Sie $\mathbf{A}^T$ und erraten Sie einen Eigenvektor für die einzelnen Matrizen ${\mathbf{T}^{(i)}}^T$.

d) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mittels MATLAB und berechnen Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$. Verwenden Sie dazu den MATLAB-Befehl *null()*, welcher Ihnen eine orthogonale Basis für den Kern einer Matrix berechnet.

e) Skalieren Sie den berechneten Eigenvektor so, dass die Bedingung der gesamten Milchmenge von 3 Litern $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 3$ berücksichtigt wird.

Siehe nächstes Blatt!

9. Lösen Sie die Multiple-Choice-Aufgaben.

1. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A}^3 = \mathrm{I}$.

(a) Die lineare Abbildung zur Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ ist in jedem Fall injektiv.

(b) Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}^2\mathbf{v}$ entweder ein Eigenvektor der Abbildung $\mathbf{A}$ zum Eigenwert 1 oder der Nullvektor.

(c) Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis ist und die Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so gilt $n \leq m$.

2. Eine normierte Eigenzerlegung einer Matrix ist die Menge ihrer Eigenwerte mit zugehörigen normierten Eigenvektoren. Zwei Zerlegungen, die sich nur durch ihre Reihenfolge unterscheiden, betrachten wir als identisch.

(a) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

(b) Eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

(c) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

(d) Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten hat 2^n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

Bei dieser Serie gibt es keine Abgabe.

`http://igl.ethz.ch/teaching/linear-algebra/la2020/`